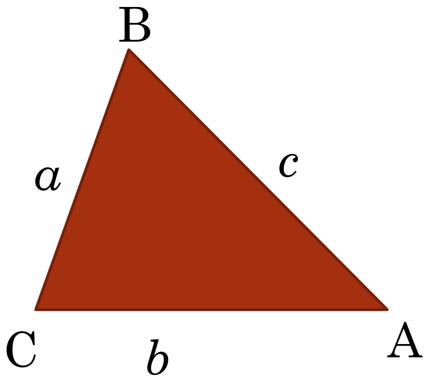
Formula di Erone

Dimostrata algebricamente



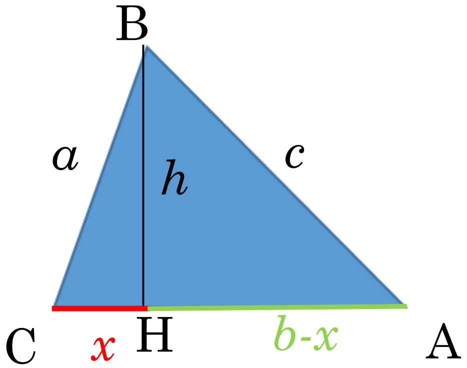
$P = a+b+c$

$p = \frac{P}{2} = \frac{a+b+c}{2}$

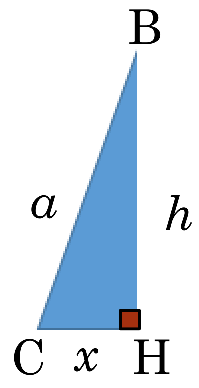
$\text{Area} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

DIMOSTRAZIONE

1. L'area del triangolo si può calcolare con la formula $\text{Area} = \frac{b \cdot h}{2}$
Scelto il lato b come base, tracciamo l'altezza h = BH relativa a b. Detto $x = \overline{CH}$, risulta $\overline{HA}$ = b-x.

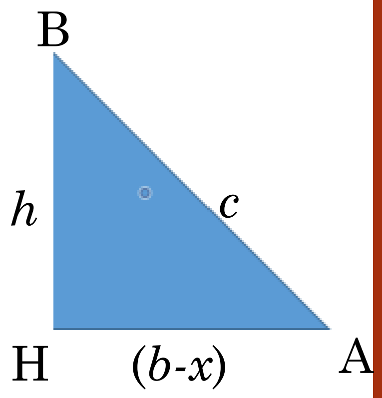


2. Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo $B\hat{H}C$, ricaviamo il quadrato del cateto h: $a^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - x^2 \Rightarrow h = \sqrt{a^2 - x^2}$



3. Facciamo lo stesso nel triangolo rettangolo $B\hat{H}A$

$c^2 = h^2 + (\mathrm{b} - \mathrm{x})^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - (\mathrm{b} - \mathrm{x})^2 \Rightarrow h = \sqrt{c^2 - (b - x)^2}$



4. Uguagliamo le due espressioni trovate per h^2:

$a^2 - x^2 = c^2 - (\mathrm{b} - \mathrm{x})^2$, e risolviamo tale uguaglianza rispetto alla x

$a^2 - x^2 = c^2 - (b^2 + x^2 - 2\mathrm{bx})$; $a^2 - x^2 = c^2 - b^2 - x^2 + 2\mathrm{bx}$;

$a^2 + b^2 - c^2 = x^2 - x^2 + 2\mathrm{bx}$; $x = \frac{a^2+b^2-c^2}{2b}$

5. Nella prima formula per calcolare h:

$h = \sqrt{a^2 - x^2}$; $\sqrt{a^2 - (\frac{a^2+b^2-c^2}{2b})^2}$; $\sqrt{a^2 - \frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4b^2}}$;

Abbiamo così espresso l’altezza in funzione dei tre lati del triangolo.

6. Calcoliamo l'Area con la formula

$$A = \frac{1}{2}\text{base} \cdot h = \frac{b}{2}\sqrt{a^2 - \frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4b^2}} =$$

Trasportiamo il fattore $\frac{b}{2}$ sotto radice

$$= \sqrt{(\frac{b}{2})^2[a^2 - \frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4b^2}]} = \sqrt{\frac{b^2}{4}[a^2 - \frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4b^2}]} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2b^2}{4} - \frac{b^2}{4} \cdot \frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4b^2}} =$$

Semplifichiamo b^2 nel 2° addendo

$$= \sqrt{\frac{a^2b^2}{4} - \frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4 \cdot 4}} =$$

Entrambe le frazioni sono due quadrati

$$= \sqrt{(\frac{ab}{2})^2 - (\frac{a^2+b^2-c^2}{4})^2} =$$

Il radicando è una differenza di quadrati: scomponiamo

$$= \sqrt{\left(\frac{ab}{2} + \frac{a^2+b^2-c^2}{4}\right)\left(\frac{ab}{2} - \frac{a^2+b^2-c^2}{4}\right)} =$$

Sommiamo le due frazioni dentro le due parentesi

$$= \sqrt{\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{4} \cdot \frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{4}} =$$

Raggruppiamo i primi tre addendi in ogni frazione, e nella seconda mettiamo un -1 in evidenza

$$= \sqrt{\frac{(2ab+a^2+b^2)-c^2}{4} \cdot \frac{-1(-2ab+a^2+b^2)+c^2}{4}} =$$

Usiamo la scomposizione del quadrato di binomio

$$= \sqrt{\frac{(a+b)^2-c^2}{4} \cdot \frac{-(a-b)^2+c^2}{4}} =$$

I numeratori sono ancora differenze di quadrati e li scomponiamo

$$= \sqrt{\frac{[(a+b)+c][(a+b)-c]}{4} \cdot \frac{[c+(a-b)][c-(a-b)]}{4}} =$$

Togliamo le parentesi tonde ( ) e spezziamo ogni frazione nel prodotto di due frazioni

$$\sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{c+a-b}{2} \cdot \frac{c-a+b}{2}} =$$

Eseguiamo le sostituzioni

$$= \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b+c-2c}{2} \cdot \frac{c+a+b-2b}{2} \cdot \frac{c+a-2a+b}{2}} =$$

Spezziamo le ultime 3 frazioni nella somma algebrica di 2 frazioni

$$= \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \left(\frac{a+b+c}{2} - \frac{2c}{2}\right)\left(\frac{c+a+b}{2} - \frac{2b}{2}\right)\left(\frac{c+a+b}{2} - \frac{2a}{2}\right)} =$$

Semplificando il fattore 2 e sostituendo $p = \frac{a+b+c}{2}$ si ha:

$$= \sqrt{p \cdot (p-c) \cdot (p-b) \cdot (p-a)}$$

C.V.D.

Realizzato da:
Lia Flaccomio
Miranda Torrisi
Bruno Giorgianni
Federica Lo Sciuto
Giorgia Caruso