La Formula di ERONE Dimostrazione geometrica

Al matematico Erone (Ηρων), che operò in Alessandria d'Egitto tra il I e il II secolo d.C., viene attribuita la formula del **calcolo dell'area di un triangolo mediante le misure dei suoi lati.** Tale dimostrazione, infatti, compare nella sua opera METRICA, consultabile in HERON ALEXANDRINUS, Opera, vol.III, edidit Herman Schone, Leipzig, Teubner, 1903.

PREREQUISIITI per dimostrare la formula di Erone

1) In un qualsiasi triangolo le bisettrici dei tre angoli interni si incontrano in uno stesso punto, detto INCENTRO, che è il CENTRO della circonferenza INSCRITTA al triangolo. I lati del triangolo risultano tangenti a tale circonferenza, e nei punti di tangenza il raggio è ad essi perpendicolare.

2) Esistono due segmenti tangenti ad una circonferenza condotti da un punto esterno ad essa: essi sono congruenti tra loro e l'angolo da essi formato ha come bisettrice la congiungente il punto esterno con il CENTRO della circonferenza.

3) Un poligono CIRCOSCRITTO ad una circonferenza è EQUIESTESO ad un triangolo che ha base CONGRUENTE al perimetro del poligono e altezza CONGRUENTE al raggio della circonferenza (APOTEMA DEL TRIANGOLO).

4) Triangoli simili hanno angoli OMOLOGHI congruenti e lati OMOLOGHI che stanno in proporzione (sono DIRETTAMENTE PROPORZIONALI). Primo criterio di similitudine:se due triangoli hanno due angoli rispettivamente congruenti a due angoli allora essi sono simili.

5) Assioma sui SEMIPIANI:Due punti su semipiani opposti sono estremi di un segmento che interseca in un punto la retta ORIGINE dei semipiani; due punti interni allo stesso semipiano sono estremi di un segmento che non interseca l'ORIGINE del semipiano.

6) Angoli OPPOSTI al vertice sono CONGRUENTI.

7) Proporzioni; proprietà fondamentale: Il prodotto degli estremi è uguale al prodotto dei medi.

8) La somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto.

9) La somma degli angoli interni di un poligono CONVESSO è pari a tanti angoli PIATTI quanti sono i lati meno due.

10) Se un quadrilatero è inscritto in una circonferenza allora ha gli angoli opposti SUPPLEMENTARI; viceversa, se un quadrilatero ha gli angoli opposti SUPPLEMENTARI allora esso si può inscrivere in una circonferenza.

11) Se un triangolo è INSCRITTO in una semicirconferenza (cioè inscritto in una circonferenza e con un lato coincidente con il diametro) allora esso è rettangolo e il diametro è l'IPOTENUSA; viceversa, se un triangolo rettangolo è inscritto in una circonferenza allora l'ipotenusa coincide con il diametro.

12) Secondo teorema di Euclide: in un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equiesteso al rettangolo avente per lati le due proiezioni dei cateti sull'ipotenusa; ovvero, l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale tra le due proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

13)Proprietà commutativa dell'addizione: scambiando l'ordine degli addendi il totale rimane invariato, A+B=B+A.

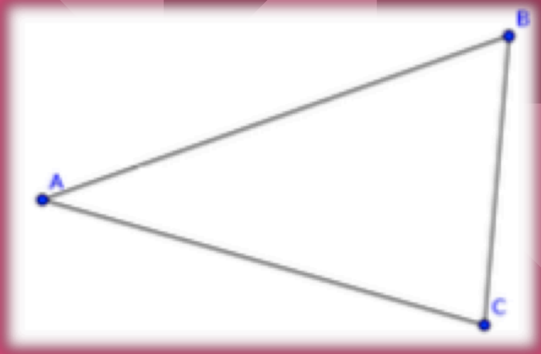
14) Proprietà associativa dell'addizione: associando in modo diverso gli stessi addendi di un'addizione il risultato rimane invariato, (A+B)+C=A+(B+C)

15) Proprietà commutativa della moltiplicazione: scambiando l’ordine dei fattori il prodotto rimane invariato, A•B=B•A.

16) Proprietà associativa della moltiplicazione: associando in modo diverso gli stessi fattori di una moltiplicazione il prodotto rimane invariato, (A*B)*C=A*(B*C).

17) Semplificazione di radicali.

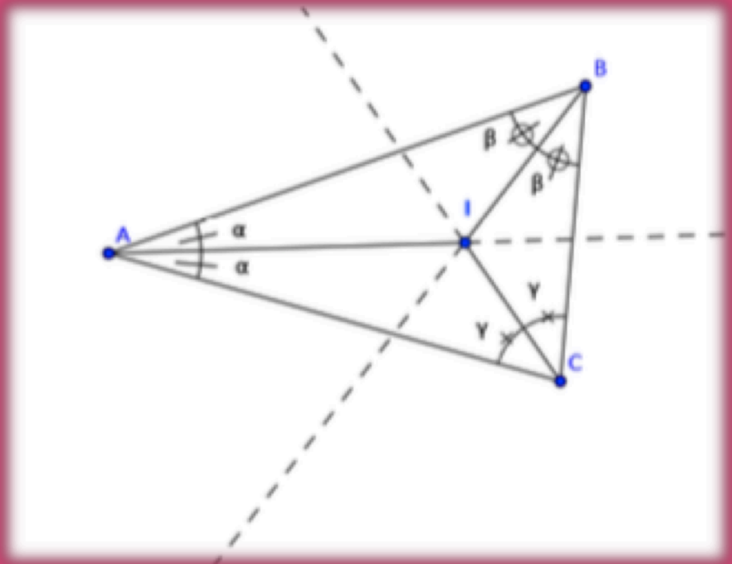
ENUNCIATO



Sia dato un triangolo qualsiasi di vertici A,B,C, lati AB,BC,AC, di misura rispettivamente AB, BC e AC.
Detta P la misura del perimetro, P=AB+BC+AC, si indichi con p la misura del semiperimetro, cioè p=P/2.
Indicata con A l'area della superficie del triangolo, si vuole dimostrare che:

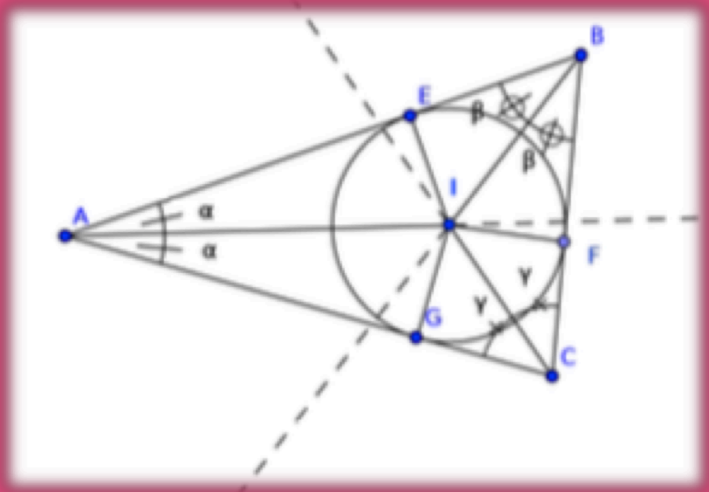
$$\sqrt{\frac{P}{2}\left(\frac{P}{2}-\overline{AB}\right)\left(\frac{P}{2}-\overline{BC}\right)\left(\frac{P}{2}-\overline{AC}\right)}=\sqrt{p\,(p-\overline{AB})(p-\overline{BC})(p-\overline{AC})}$$

cioè **l'area del triangolo si ottiene estraendo radice quadrata dal prodotto avente per fattori il semiperimetro, il semiperimetro diminuito del primo lato, il semiperimetro diminuito del secondo lato e il semiperimetro diminuito del terzo lato.**

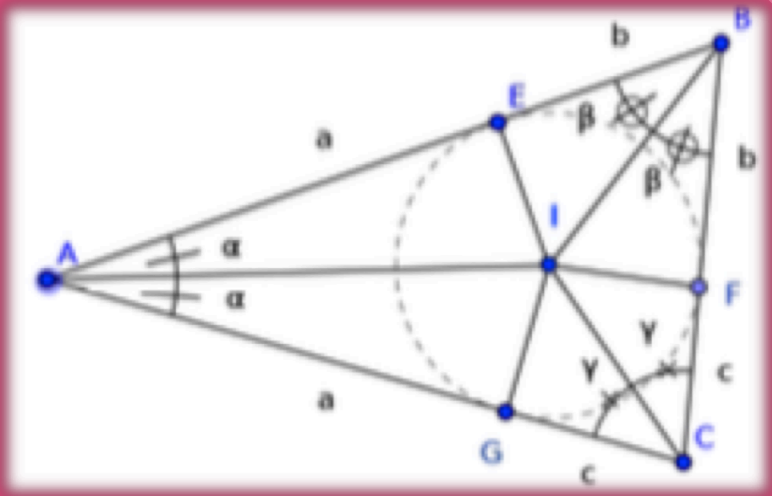


Per 1) le tre bisettrici degli angoli interni si intersecano nell'incentro I,dividendo ciascun angolo interno a metà. Indichiamo con α la misura di ciascuna delle due parti congruenti in cui resta diviso Â,con β la misura delle due metà di B e con γ la misura delle due metà di C.

Per 1) l'incentro I è il centro della circonferenza inscritta nel triangolo, alla quale i tre lati sono tangenti nei punti E, F e G.
Sia *r* la misura del raggio, *r*= IE= IF= IG.
Ancora per 1) IE⊥AB, IF⊥BC, IG⊥AC.



Si ha, per 2), AE≡AG perché segmenti tangenti alla circonferenza di centro I condotti dal punto esterno A. Si ponga perciò la loro misura uguale ad a:
AE=AG=a.
Analogamente BE≡BF e BE=BF=b;
ed anche CF≡CG e CF=CG=c.



Quindi,poiché AB=AE+BE, si ha: AB=AE+BE=a+b;

analogamente BC=BF+CF ,quindi BC=BF+CF=b+c;

analogamente AC=AG+CG,quindi AC=AG+CG=a+c;

Si può perciò scrivere che P=AB+BC+AC=(a+b)+(b+c)+(a+c)= e applicando 13) e 12) =(a+a)+(b+b)+(c+c)=2a + 2b + 2c= 2(a+b+c)

E poiché p=P/2 risulta p=a+b+c [Formula n°1]

La tesi da dimostrare A si può riscrivere come:

$$A = \sqrt{p\,(p-\overline{AB})(p-\overline{BC})(p-\overline{AC})} = \sqrt{(a+b+c[(p-\overline{AB})][(p-\overline{BC})][(p-\overline{AC})]} =$$
$$\sqrt{(a+b+c)[(a+b+c)-(a+b)][(a+b+c)-(b+c)][(a+b+c)-(a+c)]}$$

e applicando 13) e 12) $\sqrt{(a + b + c)[c][a][b]}$.

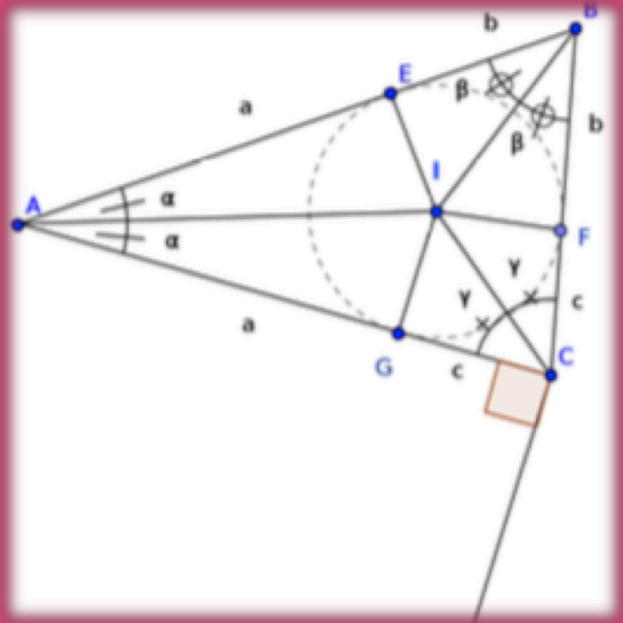
Cioè bisogna dimostrare che $A = \sqrt{(a + b + c)abc}$

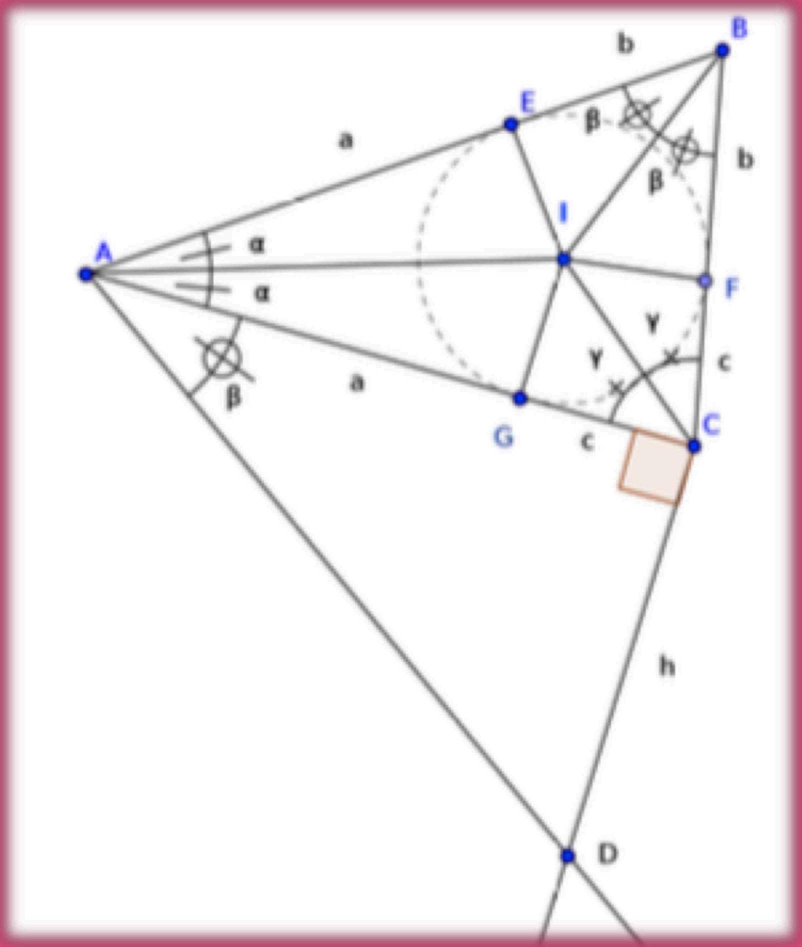
DIMOSTRAZIONE

Per 3) l'area del triangolo dato è uguale a quella di un triangolo che ha base congruente al perimetro P e altezza congruente al raggio r $A = \frac{P*r}{2} = \frac{P}{2} * r = p * r$

Elevando al quadrato $A^2 = p^2 * r^2$ [Formula n°2].

Eseguiamo la seguente costruzione: tracciamo una semiretta di origine C perpendicolare al lato AC, dalla parte opposta rispetto al vertice B (cioè nel semipiano di origine AC e non contenente il triangolo).





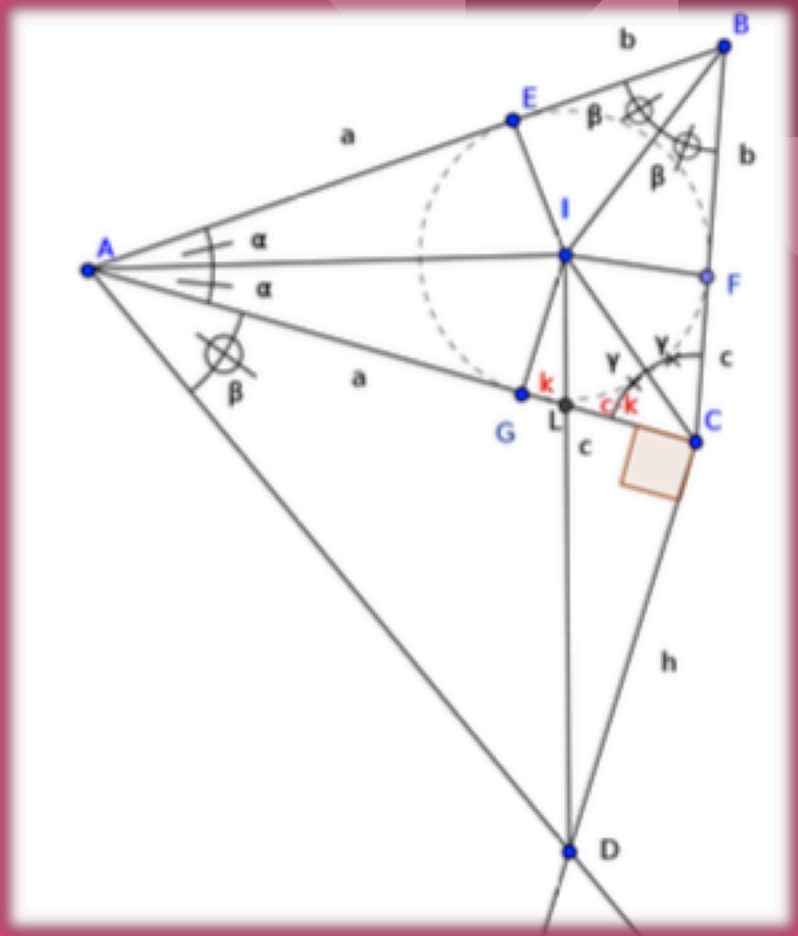
Si tracci un angolo $\widehat{CAD}$, di ampiezza β, vertice A, i cui lati intersechino la semiretta tracciata sopra in C e in D. Si indichi con h la misura di CD. I triangoli IBF e ACD
sono entrambi rettangoli, rispettivamente in F e in C, ed entrambi con un angolo acuto di misura β. Sono dunque simili per 4).
Vale la proporzione tra i loro lati omologhi:

CD:IF=AC:BF.

E passando alle loro misure
h:r=(a+c):b [Formula n°3]

Si unisca I con D, e detto L il punto in cui tale segmento ID interseca il lato AC [L esiste per 5) poichè I e D sono su due semipiani opposti], si chiami con k la misura del segmento GL. Poichè è LC=GC-GL si ha : $\overline{LC} = \overline{GC} - \overline{GL} = c - k$

I triangoli IGL e LCD hanno ciascuno un angolo retto e nel vertice L due angoli tra loro congruenti perchè opposti al vertice [vedi 6)]. Sono perciò simili per 4) e si può scrivere la proporzione tra i lati omologhi CD:IG = LC:GL.
E passando alle loro misure
h:r=(c-k):k [Formula n°4]



Nella Formula n°3 e n°4 i primi membri sono uguali, perciò lo saranno anche i secondi, cioè (a+c):b=(c-k):k.
Applichiamo la proprietà fondamentale 7) a tale proporzione:
(a+c)*k=b*(c-k) e sviluppando i prodotti
ak+ck=bcx-bk portiamo il termine -bk al primo membro
ak+bk+ck=bc raccogliamo il fattore comune k
(a+b+c)*k=bc che, per la Formula n°1 diventa
p*k=bc [Formula n°5]

Per 8) si ha $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}$ = 1 piatto, ovvero $\widehat{2\alpha} + \widehat{2\beta} + \widehat{2\gamma}$ =1 piatto; raccogliendo 2

$2 * (\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma})$ =1 piatto e dividendo tutto per 2, infine $(\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma})$ =1 retto

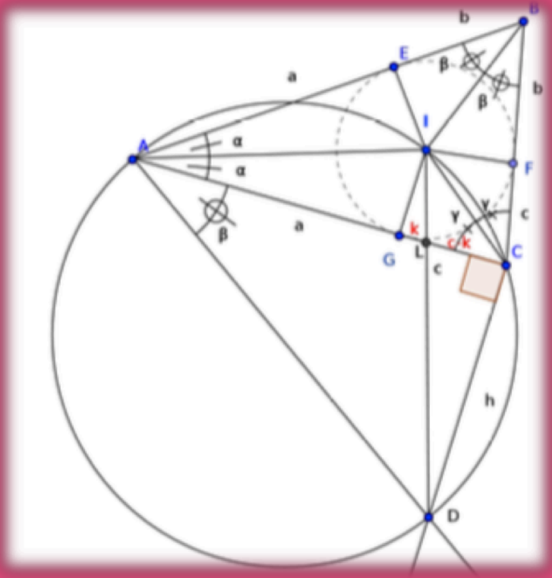
[Formula n°6].
Nell’ultima figura della costruzione si può affermare che risulta :

$\widehat{IAD} = \widehat{\alpha} + \widehat{\beta}$ e $\widehat{ICD} = \widehat{\gamma} + 1\ retto$.

Perciò sommando tali angoli si ottiene $\widehat{IAD} + \widehat{ICD} = (\widehat{\alpha} + \widehat{\beta}) + (\widehat{\gamma} + 1\, retto)$ per 14)

$(\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma}) + 1\, retto$ = per la Formula n°6 =1 retto+1 retto= 1 piatto.

Ciò significa che il quadrilatero IADC ha due angoli opposti supplementari.
Per 9) anche gli altri due angoli opposti devono essere supplementari.
Per 10) il quadrilatero IADC è inscrivibile in una circonferenza.



Ma anche il triangolo ACD risulta inscritto nella stessa circonferenza, e siccome $\widehat{ACD}$ è retto, allora per 11) l'ipotenusa AD è il diametro della circonferenza.
Considerato adesso il triangolo AID, essendo inscritto nella stessa circonferenza e avendo un lato coincidente con il diametro, sempre per 11) esso dovrà essere rettangolo in I, cioè l'angolo $\widehat{AID}$ è retto.

Dunque, anche il triangolo AIL è rettangolo in I, ed avendo AL come ipotenusa e IG⊥AL, ha come altezza relativa all'ipotenusa il raggio IG e come proiezione dei cateti sull'ipotenusa i segmenti AG e GL. Per il secondo teorema di Euclide 12) applicato a tale triangolo rettangolo AIL si può scrivere :

$IG^2 = AG*GL$;e passando alle aree $r^2 = a * k$ [Formula n°7].

Riprendiamo infine la formula 2, $A^2 = p^2 * r^2$ = applicando la Formula n°7

=p^2*a*k=p*p*a*k= per 15) e 16) =(a*p)*(p*k)= applicando la Formula n°5
=(a*p)*(b*c) = per 15) e 16) = p*(a*b*c)= applicando la Formula n°1
=(a+b+c)*(abc).

Abbiamo ottenuto A^2 = (a+b+c)*(abc).
Estraendo radice quadrata da entrambi i membri si ha: $\sqrt{A^2} = \sqrt{(a + b + c) * (abc)}$

e semplificando il radicale al primo membro per 17) A= $\sqrt{(a + b + c) * (abc)}$
che è LA TESI.