TEOREMA DI LEGENDRE

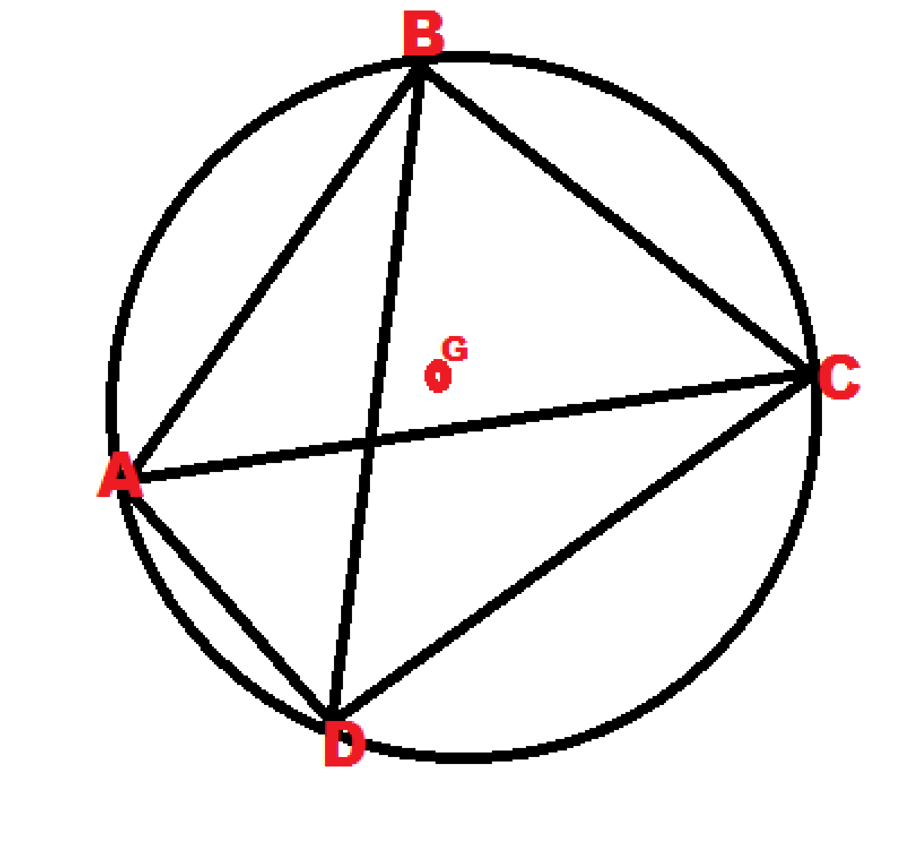
In un quadrilatero inscritto in una circonferenza, il rapporto delle diagonali è uguale al rapporto delle somme dei prodotti dei lati che concorrono negli estremi della corrispondente diagonale

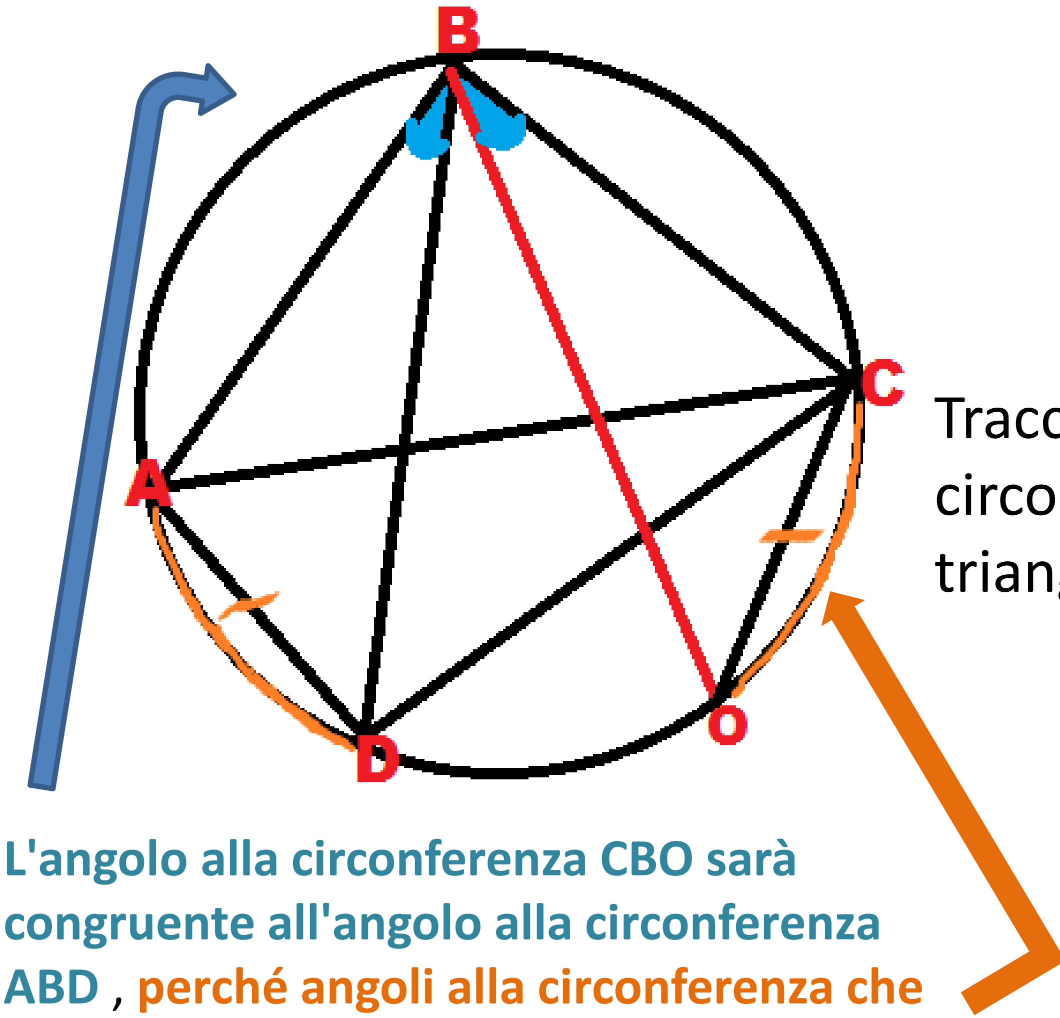
IPOTESI

ABCD QUADRILATERO INSCRITTO IN UNA CIRCONFERENZA

TESI

$$\frac{BD}{AC} = \frac{AB \cdot BC + AD \cdot DC}{AD \cdot AB + BC \cdot CD}$$

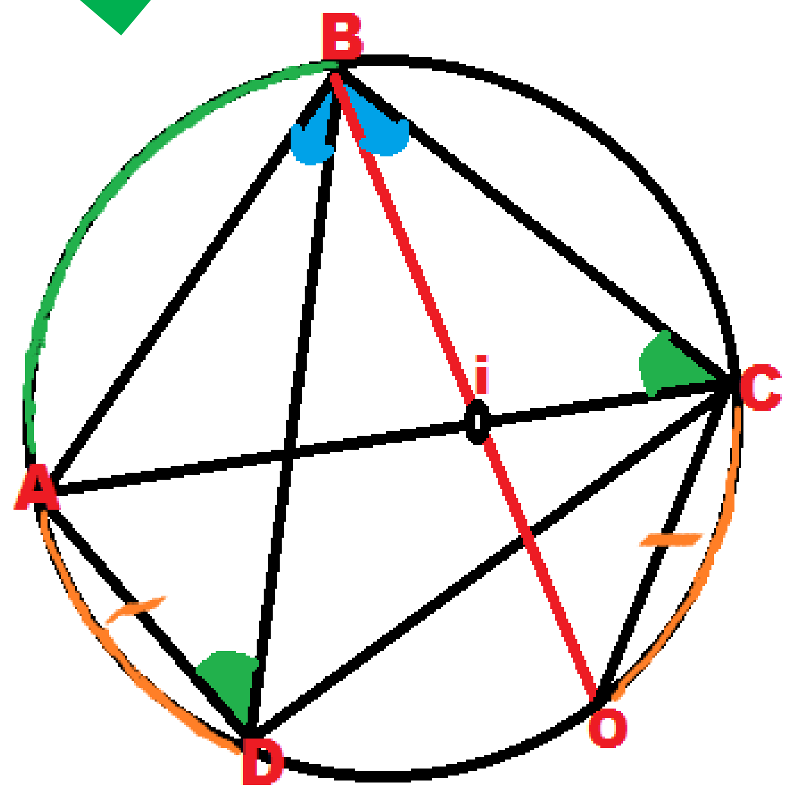




Tracciamo un punto O sulla circonferenza, formando così i triangoli ABD e BCO.

L'angolo alla circonferenza CBO sarà congruente all'angolo alla circonferenza ABD , **perché angoli alla circonferenza che insistono su archi congruenti. Anche la corda CO sarà dunque congruente alla corda AD**

Gli angoli BCA e BDA risultano angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco AB , quindi sono congruenti.



Tracciato il punto I notiamo che i triangoli BCI e ABD sono simili per il primo criterio di similitudine

Gli angoli ABD ≡ CBO per costruzione;

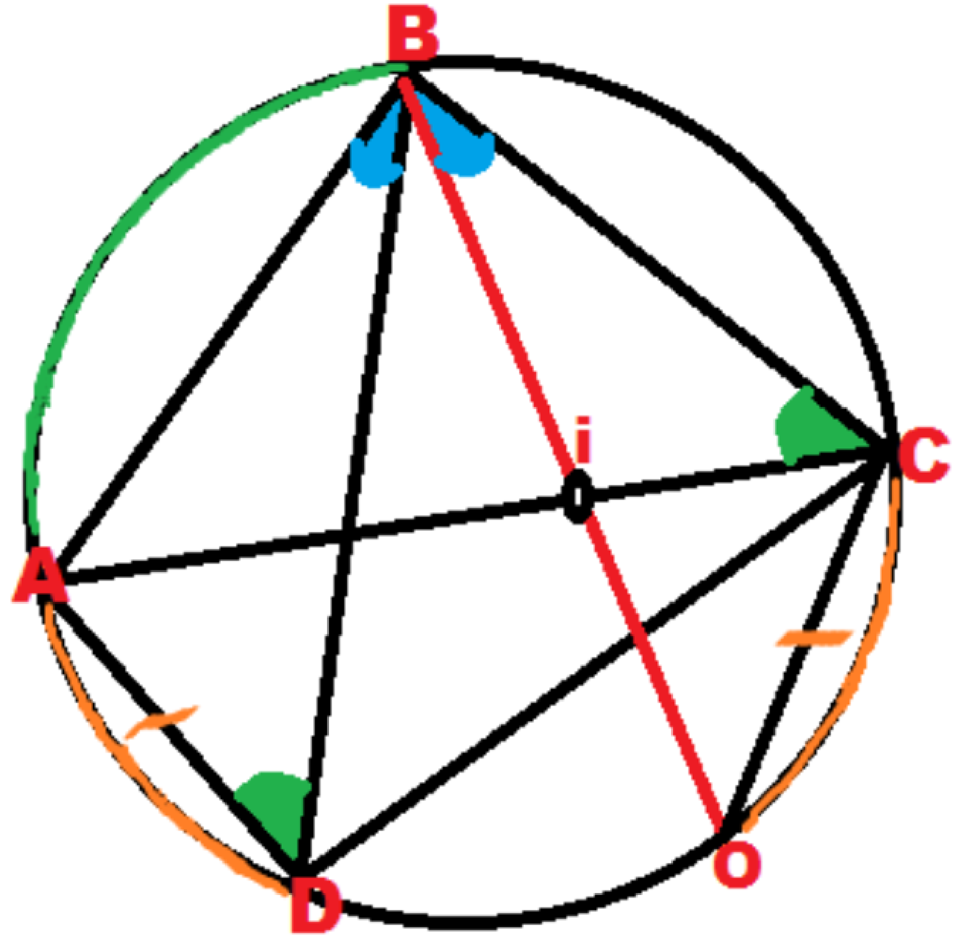
BCI ≡ BCA ≡ BDA perché angoli angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco AB.

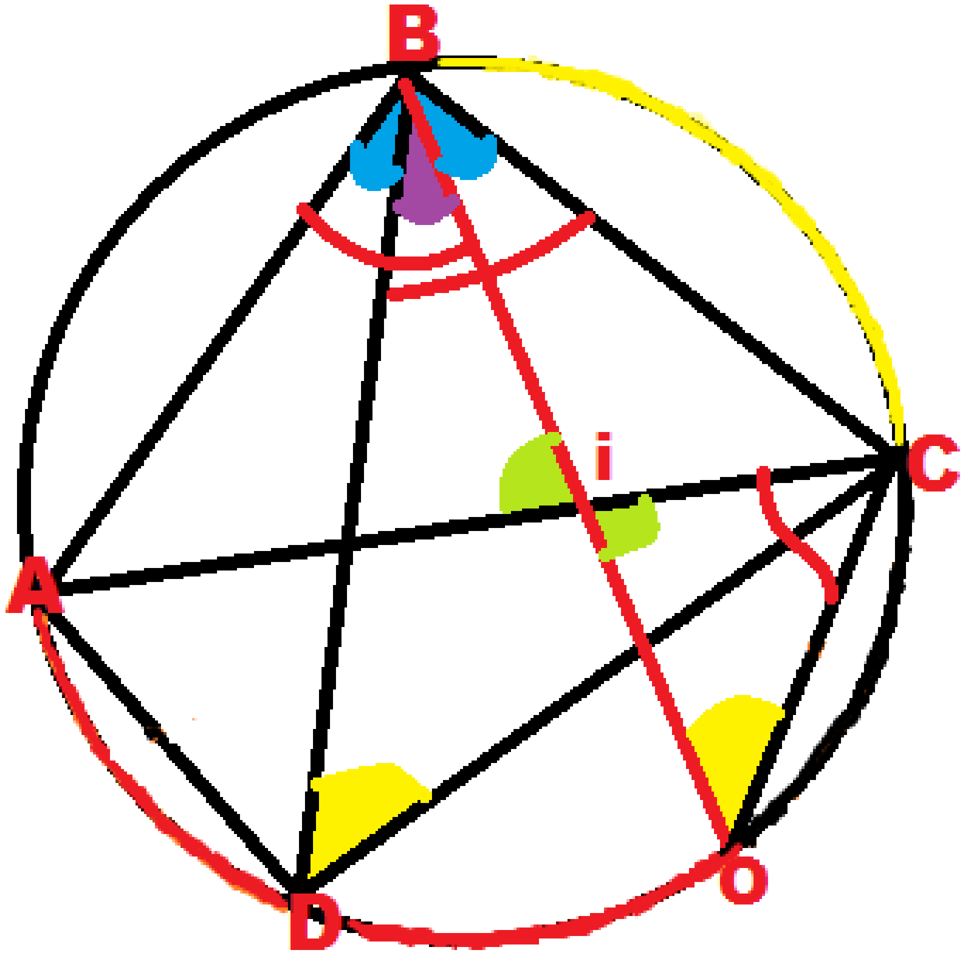
Se i triangoli sono simili allora possiamo scrivere la
seguente proporzione tra i lati omologhi:

BD: BC = AB: BI

Applicando la proprietà fondamentale delle proporzioni (il prodotto dei medi è uguale a quello degli estremi) si ha:

BI·BD = AB·BC





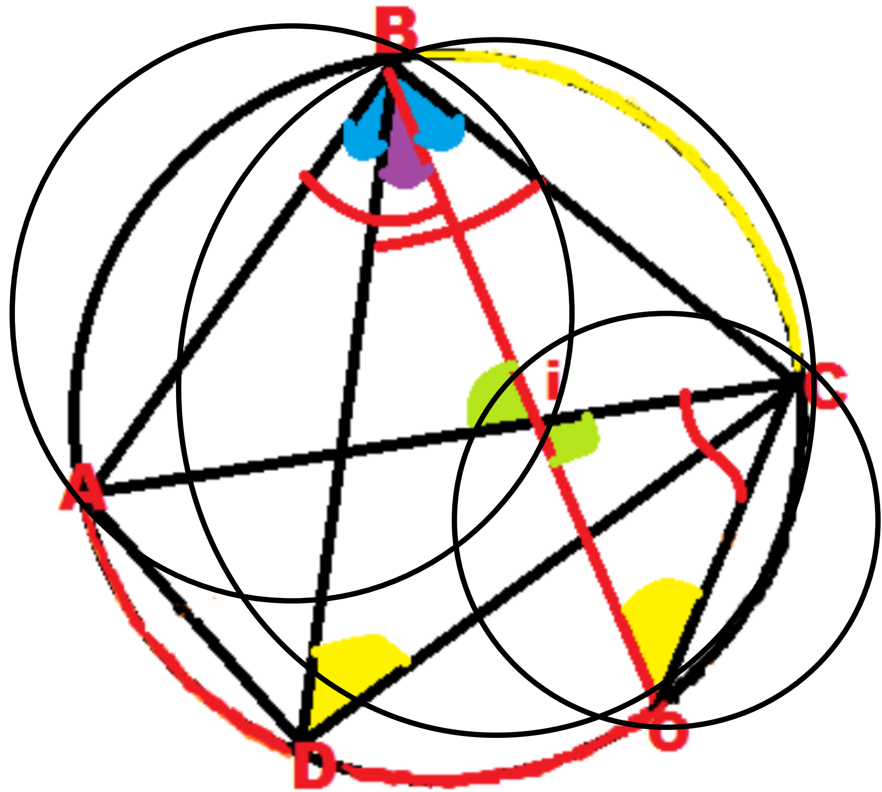
Risulta ancora:

- **CIO ≡ BIA perché angoli opposti al vertice;**
- **C OB ≡ CDB perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco BC**
- **OCA ≡ OBA perché angoli alla circonferenza che insistono sull'arco AO**

Ma

IBA≡ CBD , perché ottenuti come somma di uno stesso angolo OBD con i due angoli congruenti (per costruzione) **ABD ≡ CBO**

Perciò i tre triangoli **CIO, ABI e BDC** sono simili tra loro, per il I criterio di similitudine, poiché
ogni coppia di essi ha due angoli rispettivamente congruenti.



Per la similitudine dei triangoli CIO e BDC è possibile scrivere la proporzione tra i lati omologhi: **BD : CO = DC : IO .**

Applicando la solita proprietà fondamentale delle proporzioni si ha → **IO·BD = CO·DC**

E poiché CO ≡ AD, possiamo riscrivere l'ultima uguaglianza sostituendo CO con AD : → **IO·BD = AD·DC**

Sommando membro a membro le due uguaglianze , cioè le due proporzioni ottenute, si ha:

$$\mathbf{BI \cdot BD = AB \cdot BC}$$

$$\mathbf{+ \qquad\qquad +}$$

$$\mathbf{IO \cdot BD = AD \cdot DC}$$

$$\mathbf{BI \cdot BD + IO \cdot BD = AB \cdot BC + AD \cdot DC}$$

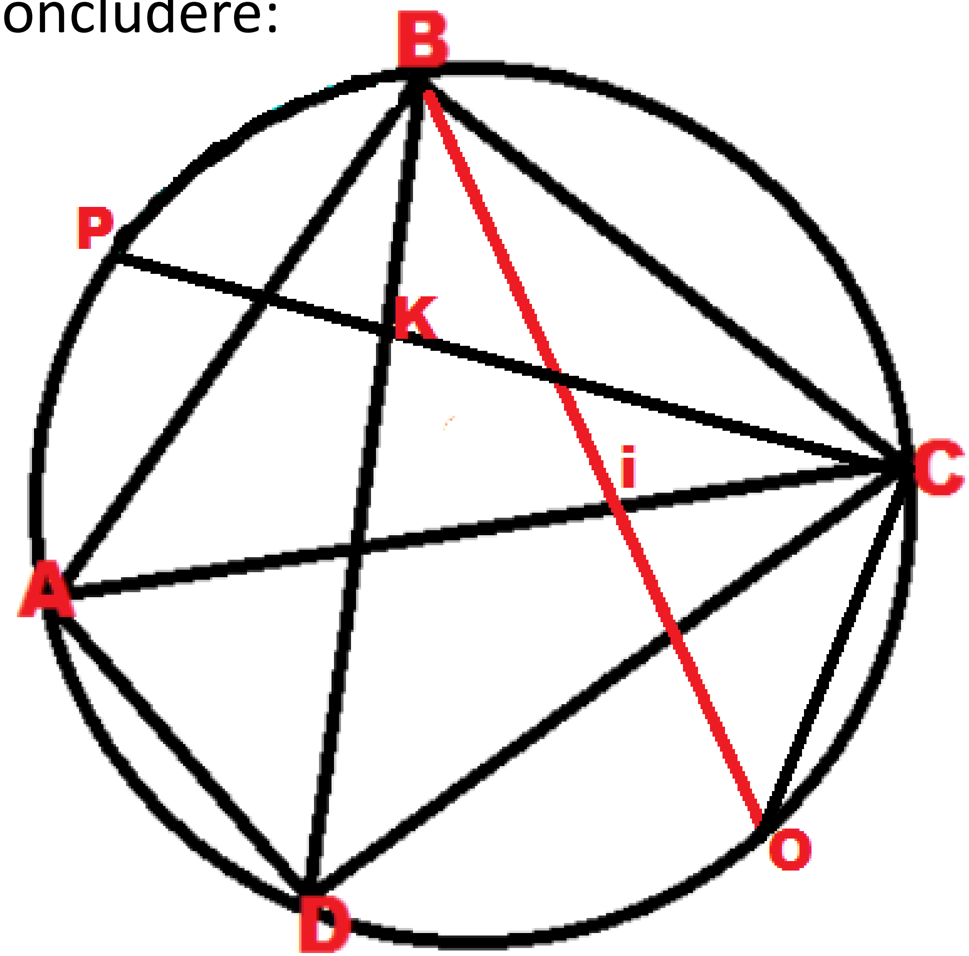
Raccogliendo a fattor comune BD al primo membro:

$$(BI + IO) \cdot BD = AB \cdot BC + AD \cdot DC$$

cioè:

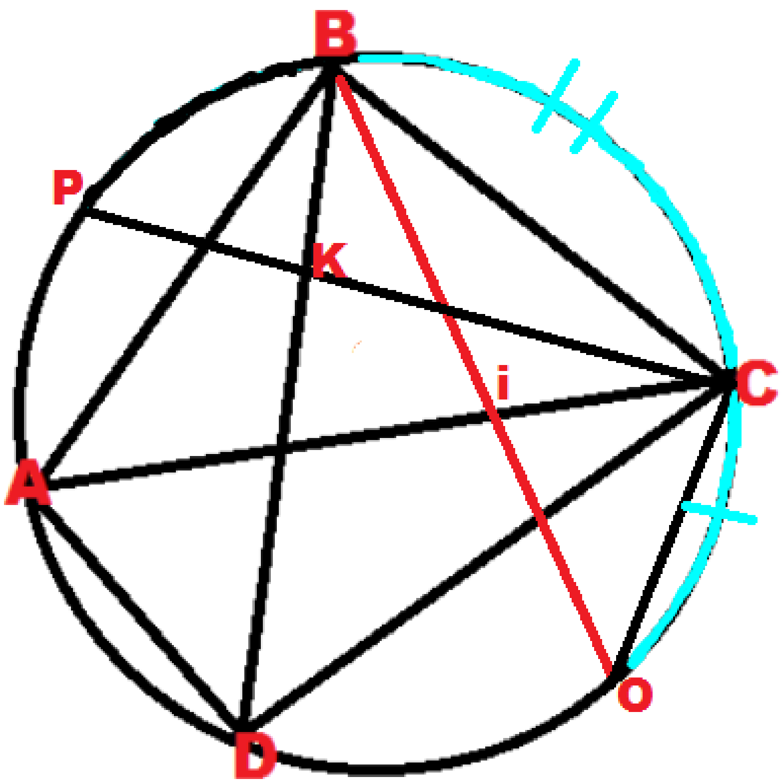
$$\mathbf{BO \cdot BD = AB \cdot BC + AD \cdot DC}$$

Se si ripete la costruzione, tracciando un punto P della circonferenza in modo che l’arco BP ≡ AD e tracciati i segmenti BP e CP, detto K il punto di intersezione tra CP e la diagonale BD è possibile rifare tutte le dimostrazioni scambiando le diagonali e concludere:

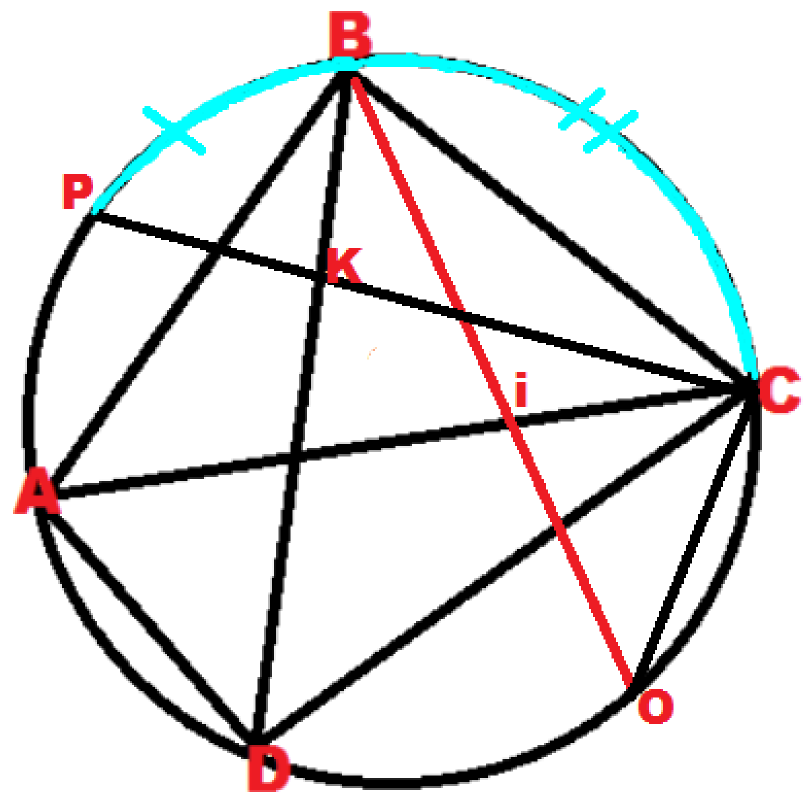


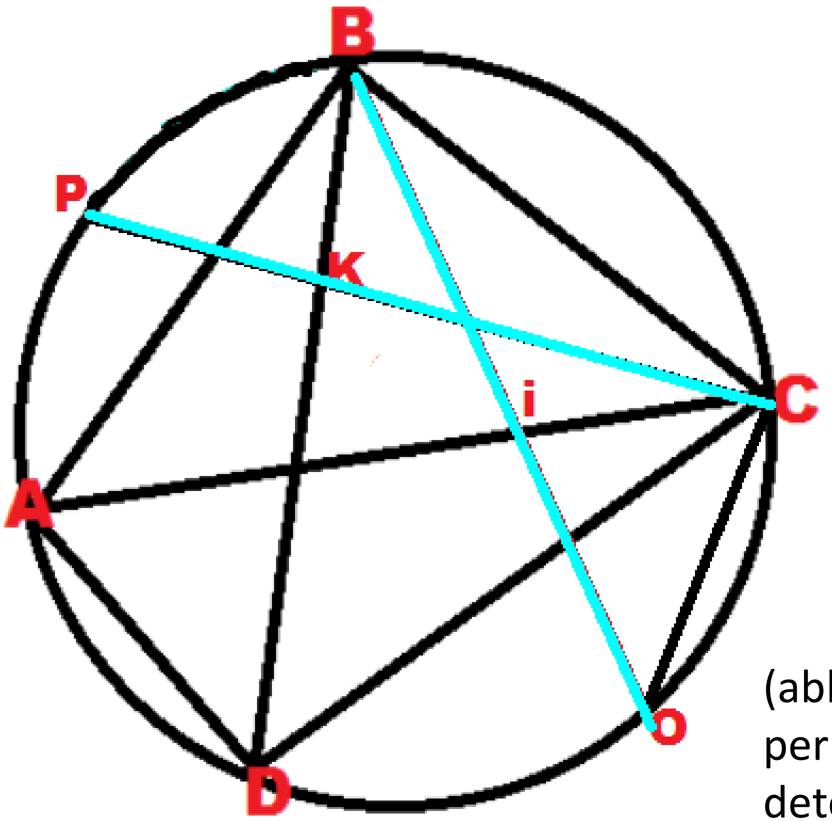
$$CP \cdot AC = AB \cdot AD + BC \cdot DC$$

Si osservi che gli archi BP ≡ CO, perché ciascuno congruente allo stesso arco AD. Sicché, sommando a ciascuno di essi lo stesso arco BC le somme saranno congruenti, cioè si avrà che gli angoli:



CBP ≡ OCB





Ma se gli archi sono congruenti lo saranno anche le corde da essi sottese:

CP ≡ BO

Di conseguenza

$$\frac{BD}{AC} = \frac{BO \cdot BD}{CP \cdot AC}$$

(abbiamo moltiplicato numeratore e denominatore per le due quantità congruenti tra loro appena determinate)

Ma il secondo membro non è altro che il rapporto tra le uguaglianze sopra ottenute, che possiamo sostituire :

$$\frac{BD}{AC} = \frac{BO \cdot BD}{CP \cdot AC} = \frac{AB \cdot BC + AD \cdot DC}{AB \cdot AD + BC \cdot DC}$$

Ottenendo la tesi

C.V.D

Fatto da:
Antonio Mazzaglia
Roberta Costa
Graziana Munzone
di IV B Classico.