La formula di Erone afferma che: in un triangolo i cui lati abbiano lunghezze a}, b}, c}, l'area è data da:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Dimostrazione

Utilizzeremo

1. La relazione fondamentale della goniometria

$\sin\gamma^2$+cosγ^2=1

Se γ è angolo interno di un triangolo $\Rightarrow$ 0<γ<180° cioè l'estremo libero di γ sulla circonferenza goniometrica è nel primo o secondo quadrante

$\Rightarrow$ sinγ>0 $\Rightarrow$ sin$\gamma = +\sqrt{1-} \, cos^2$γ

2. Teorema del coseno c^2=a^2+$b^2-2abcos\gamma$; $2abcos\gamma = a^2+b^2-c^2$;

da cui $cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2bc}$

3. Trasporto di un fattore sotto il segno di radice a$\sqrt[n]{b}$ = $\sqrt[n]{a^n b}$

4. Scomposizione di una differenza di quadrati $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

5. Scomposizione con il quadrato di binomio $\begin{cases} a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2 \\ a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \end{cases}$

6. Sostituzione di –a con +a-2°; di –b con +b-2b; di –c con +c-2c

7. L'area di un triangolo si calcola come semiprodotto di due lati per il seno dell'angolo tra essi compreso $a = \frac{1}{2}\,absin\gamma$

Nell’espressione 1) del $sin\gamma = \sqrt{1 - cos^2\gamma}$ sostituiamo la formula 2) del

teorema del coseno $cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

Si ottiene $sin\gamma = \sqrt{1 - (\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab})^2} = \sqrt{1 - (\frac{a^2+b^2-c^2}{4a^2b^2})^2} = \sqrt{\frac{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2b^2}}$

Sostituiamo nella formula 7):

$$Area = \frac{1}{2}absin\gamma = \frac{1}{2}ab\sqrt{\frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2b^2}} =$$

portiamo il fattore esterno sotto radice 3):

$$= \sqrt{(\frac{ab}{2})^2 \bullet \frac{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2b^2}} = \sqrt{\frac{a^2b^2}{4} \bullet \frac{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2b^2}} =$$

semplifichiamo $a^2b^2 = \sqrt{\frac{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{4\quad 4}} =$

scomponiamo il numeratore come differenza di quadrati 4) e il denominatore in

fattori primi $= \sqrt{\frac{[2ab+(a^2+b^2-c^2)][2ab-(a^2+b^2-c^2)]}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}} =$

togliendo le ( ) $= \sqrt{\frac{[2ab+a^2+b^2-c^2][2ab-a^2-b^2+c^2]}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}} =$

Raggruppiamo i primi tre addendi in ciascuna coppia di [ ] e nella seconda

mettiamo pure -1 in evidenza $= \sqrt{\frac{[(2ab+a^2+b^2)-c^2][-1(-2ab+a^2+b^2)+c^2]}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}}$

scomponiamo i due quadrati 5) $= \sqrt{\frac{[(a+b)^2-c^2][-(a-b)^2+c^2]}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}} =$

scomponiamo le differenze di quadrati dentro le due coppie di [ ]

$$= \sqrt{\frac{[(a+b)+c][(a+b)-c][c+(a-b)][c-(a-b)]}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}} =$$

spezziamo in 4 frazioni e togliamo le ( ) $= \sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{c+a-b}{2}\cdot\frac{c-a+b}{2}} =$

eseguiamo le sostituzioni 6) $= \sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{a+b+c-2c}{2}\cdot\frac{c+a+b-2b}{2}\cdot\frac{c+a-2a+b}{2}} =$

spezziamo le ultime 3 frazioni nella somma algebrica di due frazioni con uguale denominatore

$$= \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \left(\frac{a+b+c}{2} - \frac{2c}{2}\right)\left(\frac{a+b+c}{2} - \frac{2b}{2}\right)\left(\frac{a+b+c}{2} - \frac{2a}{2}\right)} =$$

Semplificando il fattore e sostituendo $p = \frac{a+b+c}{2}$ si ha

$$= \sqrt{p(p-c)(p-b)(p-a)}$$

C.V.D