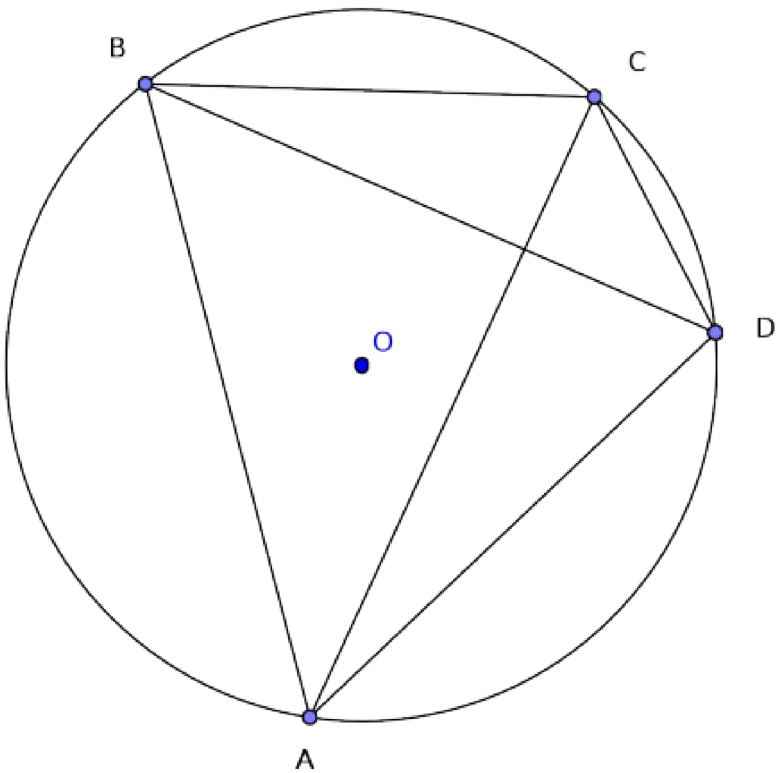
# Teorema di Tolomeo

Dimostrazione geometrica e goniometrica

# Dimostrazione geometrica:

- “In un quadrilatero convesso inscrittibile ad una circonferenza, il prodotto delle misure delle diagonali è uguale alla somma delle misure dei prodotti dei lati opposti.”

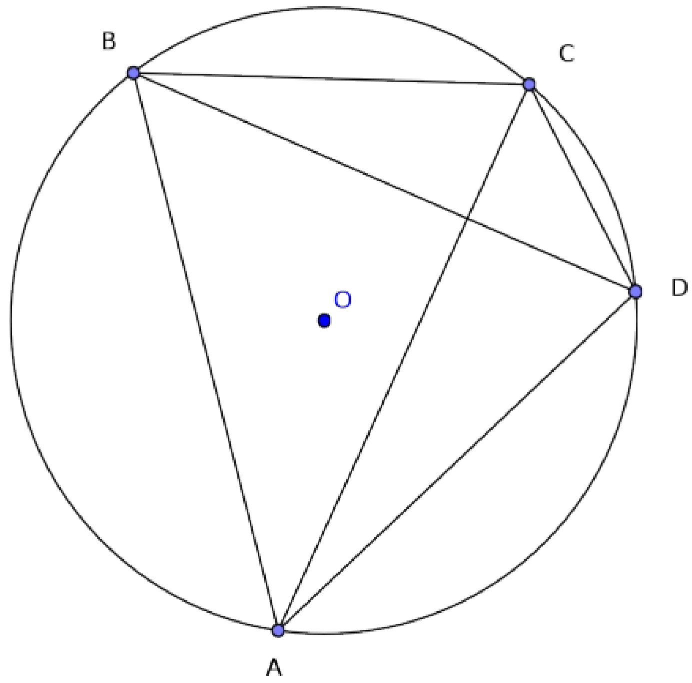


Ipotesi:

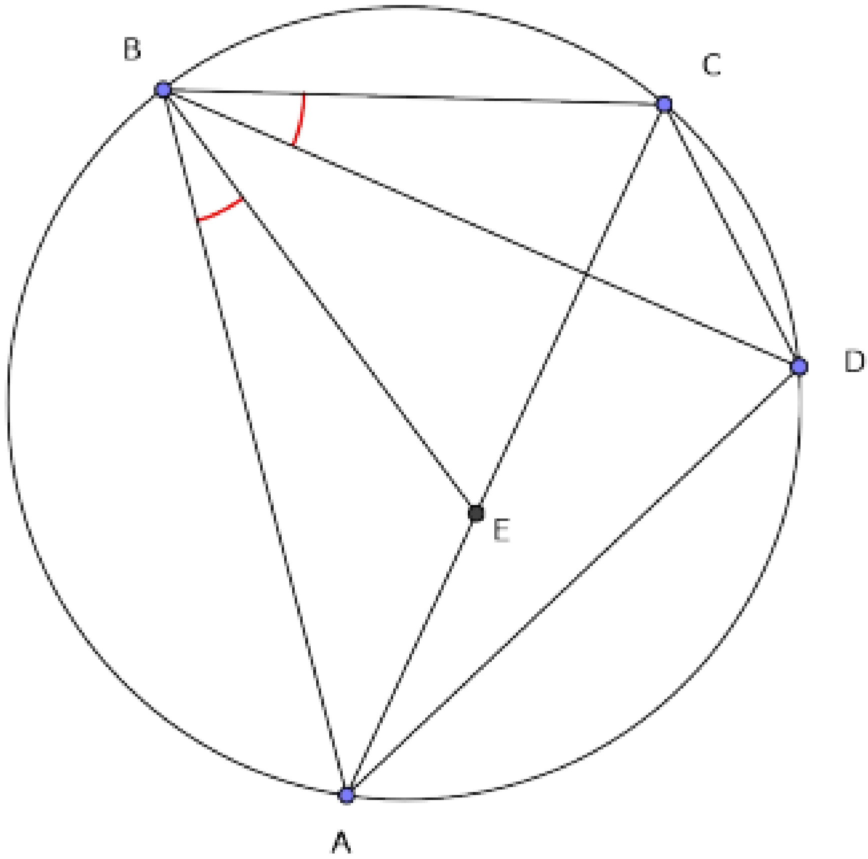
ABCD è un quadrilatero inscritto in una circonferenza

Tesi:

**AB · CD + BC · AD = AC · BD**

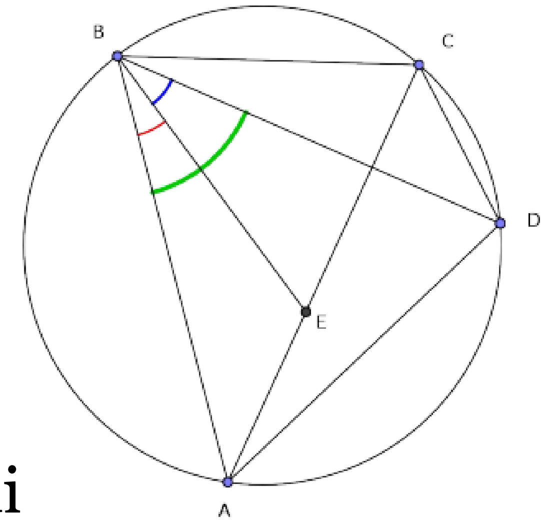


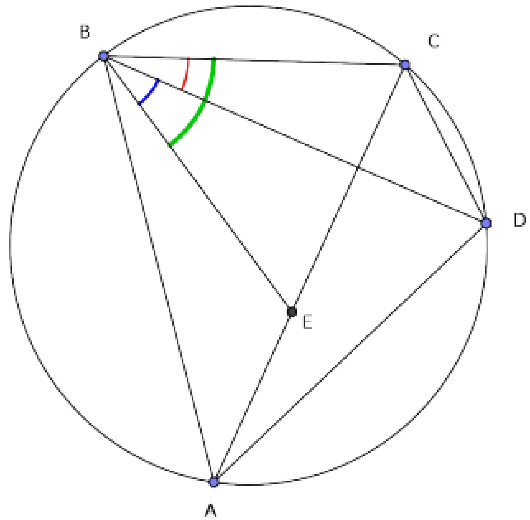
- Si costruisca l'angolo A B E che sia congruente all'angolo D B C :



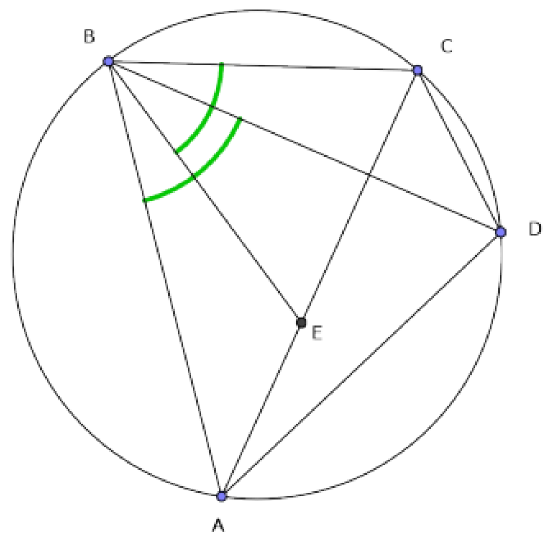
•Se si addiziona a ciascuno dei due angoli congruenti A BE e D B C lo stesso angolo centrale D B C, le somme saranno uguali, cioè sarà:

A B D ≡ E B C

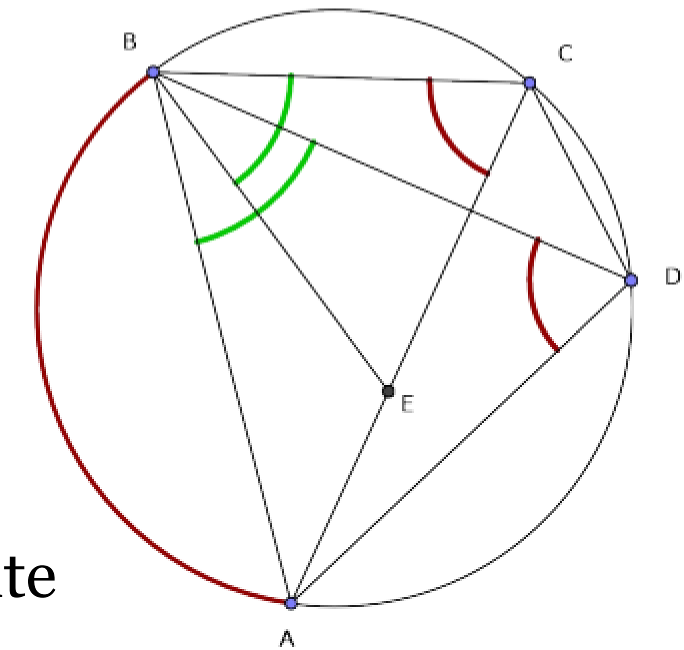



•Si ottiene quindi



- Inoltre l'angolo B D A è congruente all'angolo BC E perché sono angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco AB (sottendono la stessa corda AB):




- Allora i due triangoli ABD ed EBC, avendo

$\boxed{B\,D\,A = BC\,E}$ e $\boxed{A\,B\,D \equiv E\,BC}$

- Sono simili per il I criterio di similitudine.

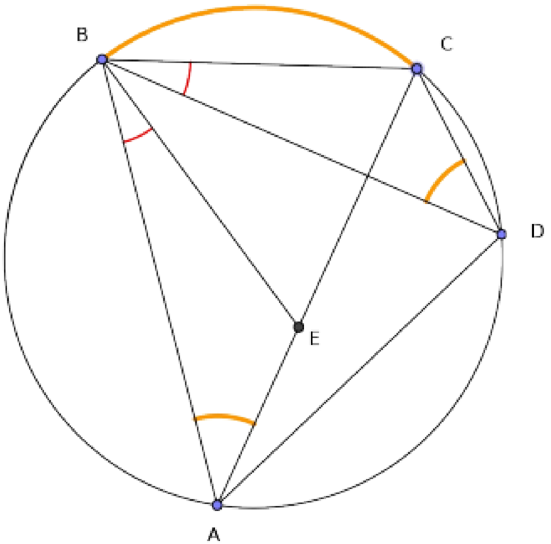
Allora è possibile scrivere la seguente proporzione tra i loro lati:

$AD : BD = EC : BC \Longrightarrow EC \cdot BD = AD \cdot BC$

- Si considerino ora i triangoli ABE e BDC. Essi hanno:

$\boxed{ABE \equiv D\,BC}$ per costruzione;

$\boxed{BA\,E \equiv BDC}$ perché sono due angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco BC




- I triangoli sono simili per il primo criterio di similitudine

Allora è possibile scrivere la seguente proporzione tra i loro lati:

$$AB : AE = BD : CD \Longrightarrow AE \cdot BD = AB \cdot CD$$

- Sommando membro a membro le uguaglianze

  $AE \cdot BD = AB \cdot CD$ e $EC \cdot BD = AD \cdot BC$

  si ha:

  $AE \cdot BD + EC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$

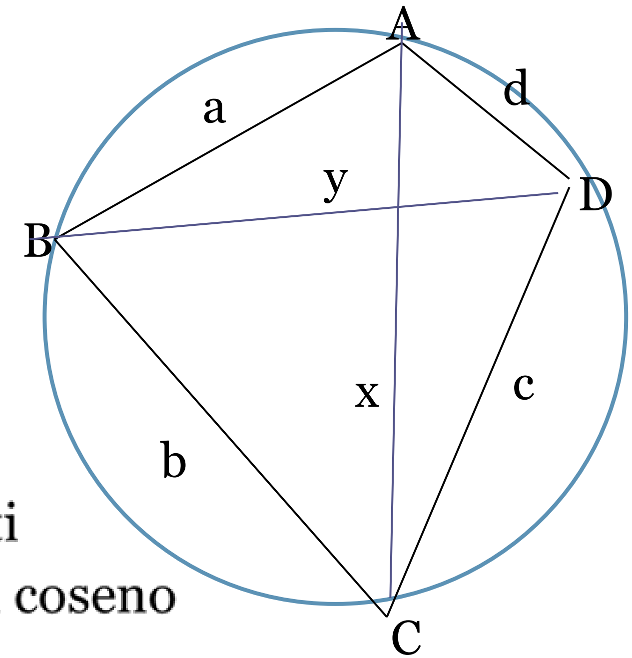
- Raccogliendo a fattor comune BD al primo membro: $(AE + EC) \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$
- Otterremo

  $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$ cioè la tesi

C.V.D

# Dimostrazione goniometrica

- Nel quadrilatero ABCD siano:
- AB=a ; BC=b ; CD=c
- AD=d ; AC=x ; BD=y



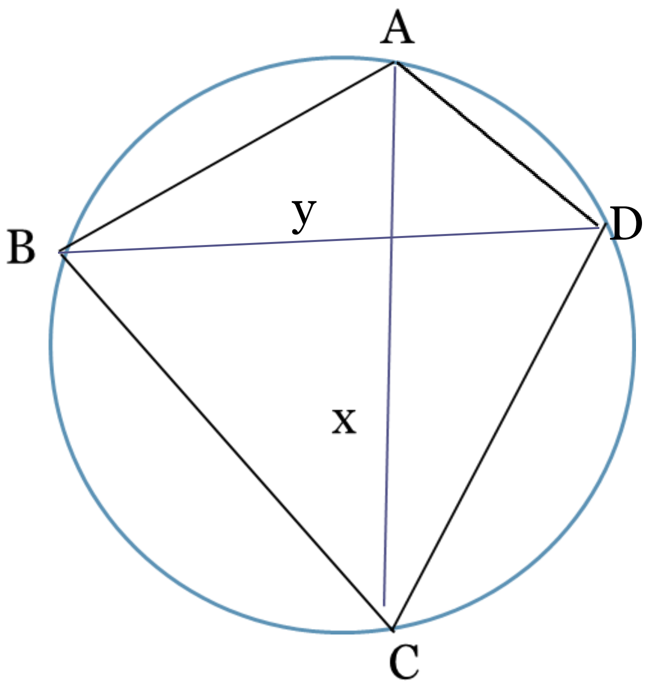

In ogni triangolo inscrittibile gli angoli opposti sono supplementari, quindi con il teorema del coseno Per i triangoli ABC e ACD:

$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\beta$

$x^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos\delta$

$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta$

$x^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\delta$




Ricaviamo $\cos\beta = \dfrac{a^2+b^2-x^2}{2ab}$

Lo andiamo a sostituire nella seconda uguaglianza: $x^2 = \dfrac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}$

Analogamente

$$y^2 = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}$$

Moltiplichiamo assieme entrambe le uguaglianze:

$$x^2y^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)(ac+bd)(ab+cd)}{(ab+cd)(ad+bc)}$$

$$x^2y^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)(ac+bd)(ab+cd)}{(ab+cd)(ad+bc)}$$

Semplifichiamo ed estraiamo radice

$$\Rightarrow \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{(ac+bd)^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{xy=ac+bd}$$

CVD

Realizzato da:
Gaia Profeta
Claudia Barbagallo
IV B classico
a.s. 2016/2017