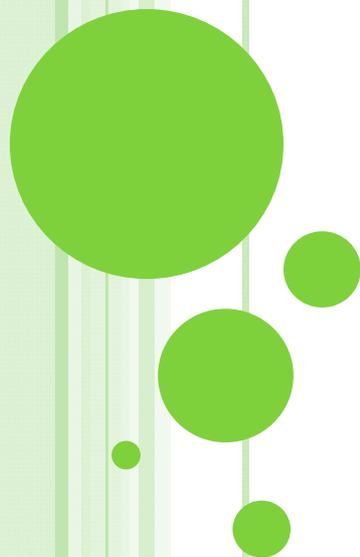
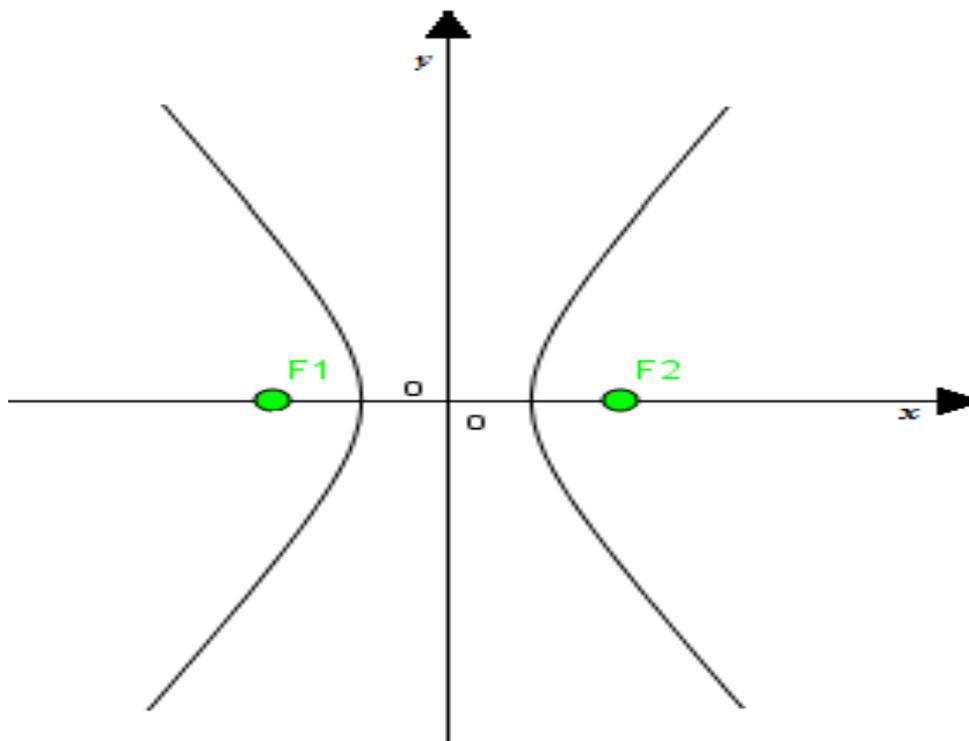
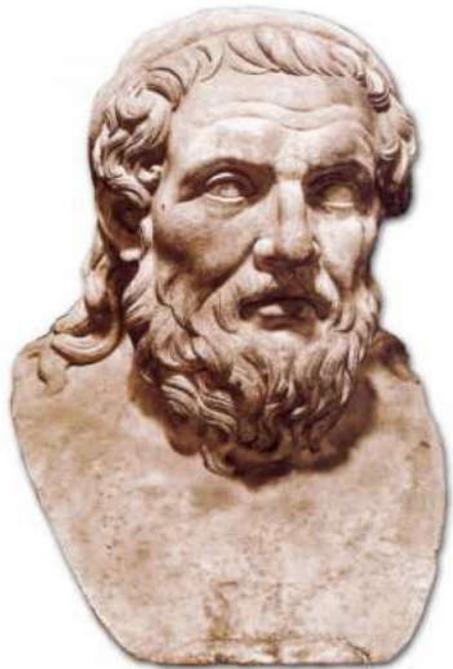


# PROPRIETÀ FOCALI DELL' IPERBOLE



# BREVE INTRODUZIONE

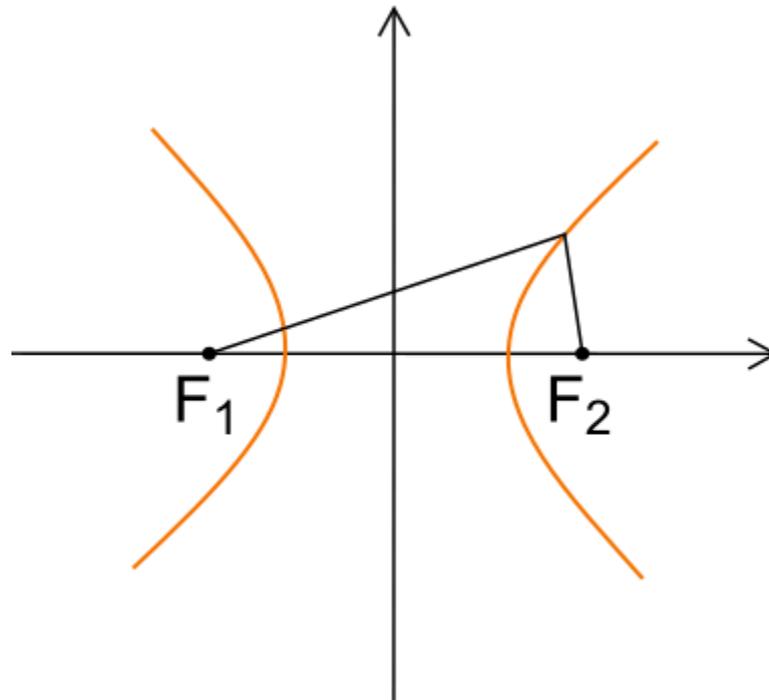
Prima di trattare le proprietà focali dell'iperbole, delineamo alcuni aspetti importanti di tale conica. Innanzi tutto lo studio delle curve piane chiamate coniche, cioè le ellissi, le parabole e le iperboli, risale all'antichità. Un'analisi completa delle proprietà di tali curve è redatta da Apollonio di Perga.



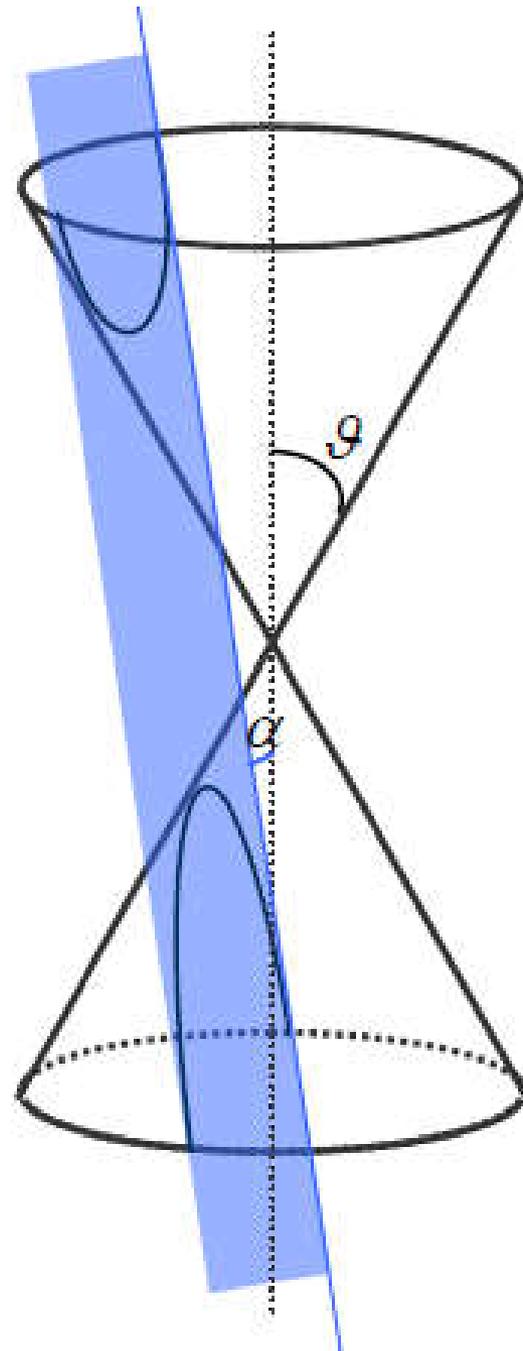
Egli fu l'autore di un importante trattato sulle coniche nella quale vi troviamo la trattazione sintetica delle coniche, viste cioè come risultato dell'intersezione tra un cono retto ed un piano.



Nel presente lavoro analizzeremo l'iperbole.  
Il termine **Iperbole** deriva dal greco  
“hyperbállein” che significa “oltrepassare” e  
richiama il fatto  
che l'angolo di apertura del cono oltrepassa  
l'angolo formato tra il piano e l'asse.



Si parla di Iperbole se il piano secante ha inclinazione minore dell'apertura del cono. In questo caso il piano interseca entrambe le parti del cono, che chiameremo falde. E la curva che si genera ha due componenti separate (non connesse).



# PROPRIETÀ 1

- Le bisettrici degli angoli opposti al vertice sono perpendicolari

## IPOTESI

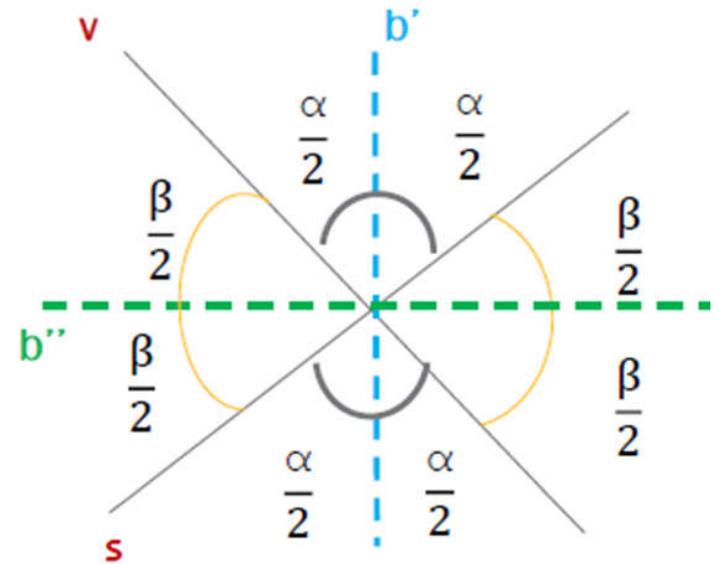
$b'$  bisettrice di  $a$

$b''$  bisettrice di  $b$

$v, s$  rette incidenti

## TESI

$b' \perp b''$



## DIMOSTRAZIONE

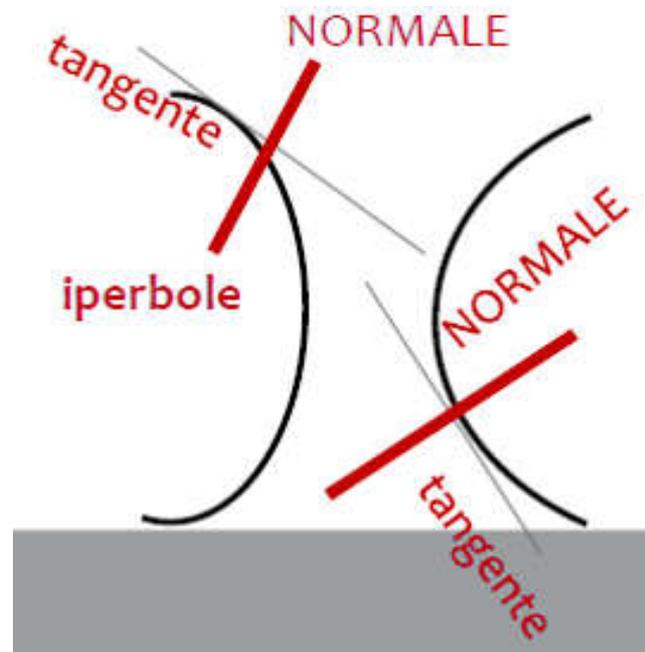
$\alpha$  e  $\beta$  adiacenti  $\rightarrow$  supplementari; ma se  $\alpha + \beta = \text{piatto} \rightarrow \alpha + \beta = \text{retto}$ ;  
 $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \text{retto} \rightarrow b' \perp b''$  C.V.D.



# DEFINIZIONE DI RETTA TANGENTE E NORMALE

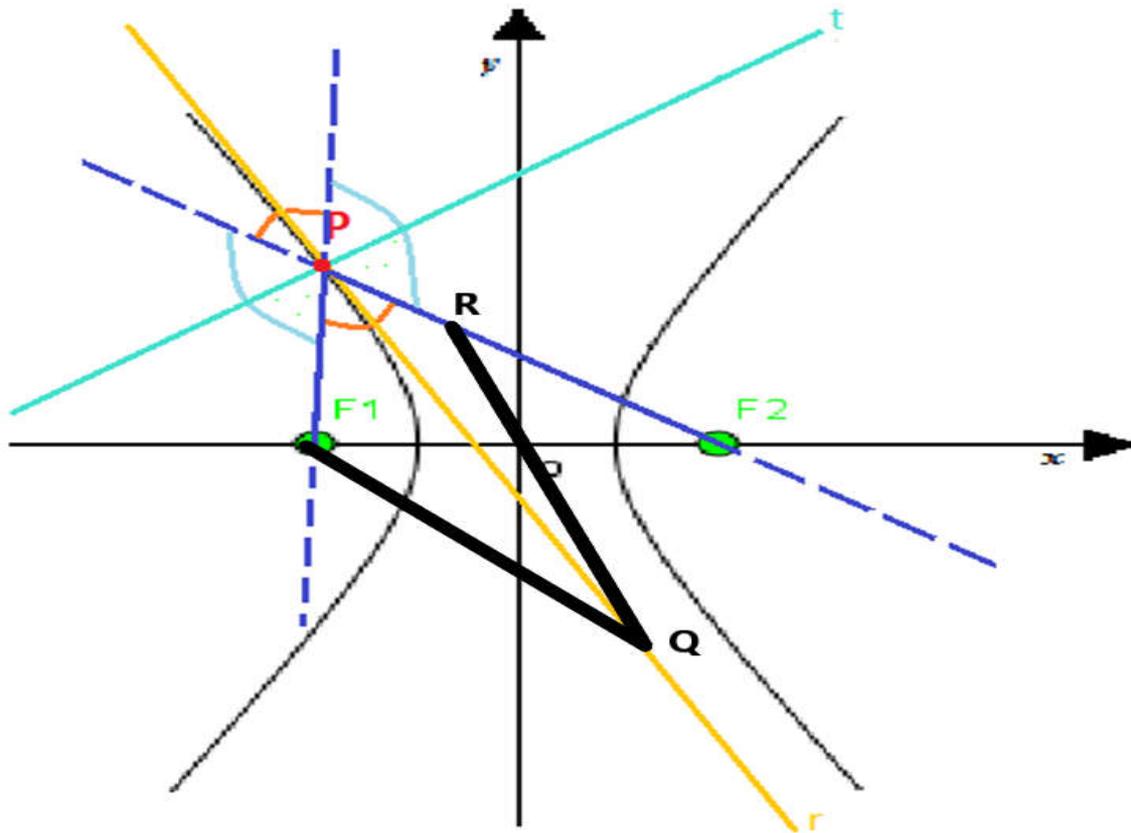
Parlando di intersezioni di una retta con una conica, il caso in cui ci sia un solo punto in comune: la retta si dice allora tangente alla conica.

Mentre la retta perpendicolare ad una retta tangente alla conica in un punto si dice retta normale alla conica in quel punto



## PROPRIETÀ 2

le rette che congiungono un qualunque punto  $P$  di un'iperbole con i due fuochi hanno come bisettrici la tangente  $r$  e la normale  $t$  all'iperbole in  $P$ .



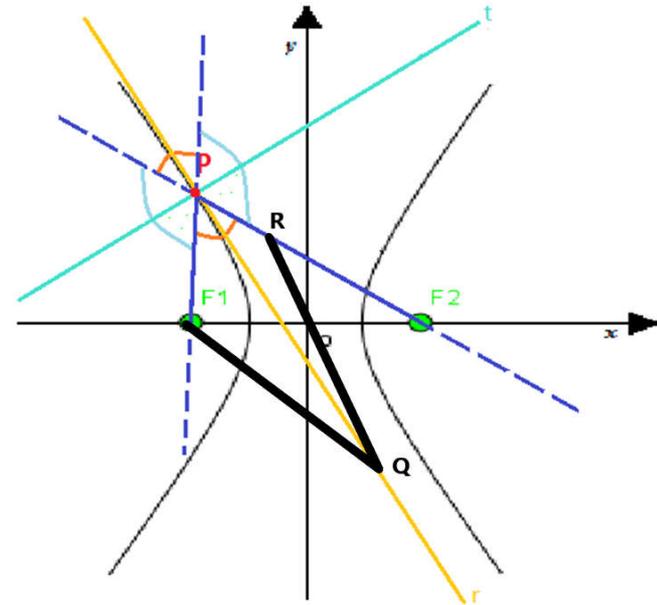
# DIMOSTRAZIONE

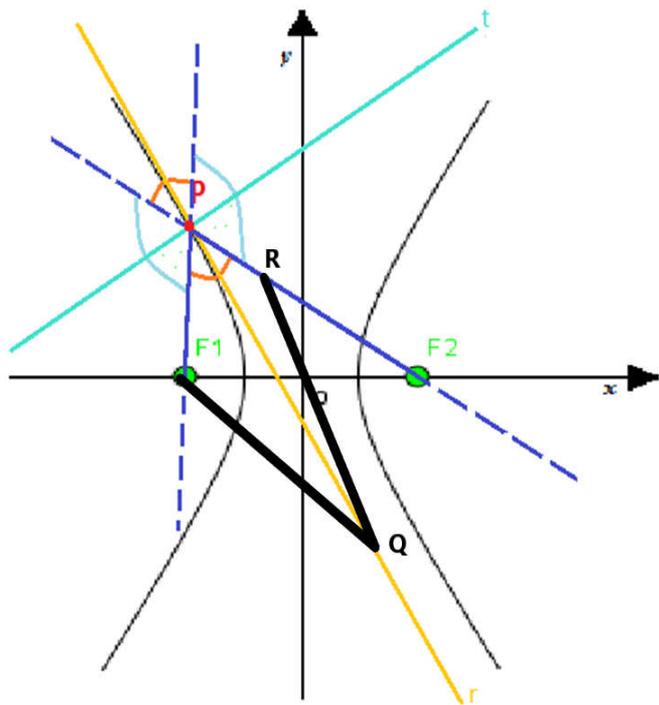
Con riferimento alla figura della slide precedente sia  $P$  un punto sulla iperbole, perciò

$PF_2 - PF_1 = l' - l$  è la costante dell'iperbole e tutti gli altri punti dovranno soddisfare la stessa proprietà di luogo.

Sia  $r$  la bisettrice dell'angolo formato da  $PF_1 = l$  e  $PF_2 = l'$

Si prenda su  $PF_2$  un punto  $R$  tale che  $PR \equiv PF_1 = l$





$$PR \equiv PF_1 = l \rightarrow F_2R = l' - l$$

Preso un qualsiasi punto  $Q$  su  $r$  diverso da  $P$   
 $QR \equiv QF_1$  (primo criterio applicato ai triangoli  $PF_1Q$  e  $PRQ$ ).

$$\text{Allora } QF_2 - QF_1 \equiv QF_2 - QR$$

Poiché  $Q$  non può stare su  $PF_2$ , altrimenti la bisettrice  $r$  coinciderebbe con il lato  $PF_2$  dell'angolo di cui è bisettrice.

Allora  $Q$ ,  $R$  ed  $F_2$  non sono allineati. Sono i vertici di un triangolo  $QRF_2$ , in cui un lato  $F_2R = l' - l$  è maggiore della differenza degli altri due  $QF_2 - QR$ , cioè  $QF_2 - QR < F_2R = l' - l$ .

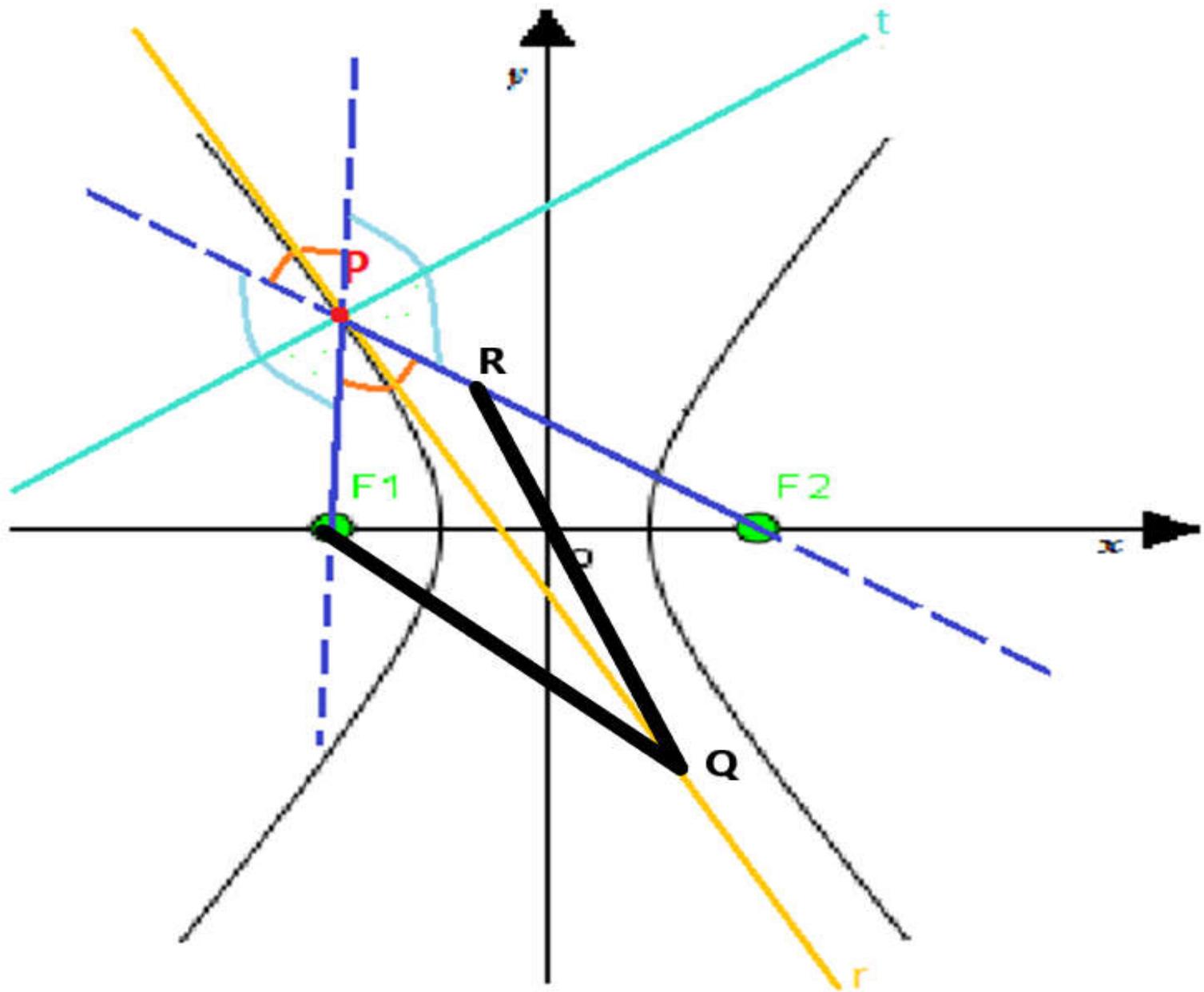
Mettendo insieme  $QF_2 - QF_1 \equiv QF_2 - QR$  e  $QF_2 - QR < F_2R = l' - l$  si ha:

$$QF_2 - QF_1 \equiv QF_2 - QR < l' - l$$

Perciò  $Q$  non può stare sulla iperbole, perché non ne soddisfa la proprietà di luogo (doveva infatti risultare  $QF_2 - QF_1 = l' - l$  e non  $QF_2 - QF_1 < l' - l$ ).

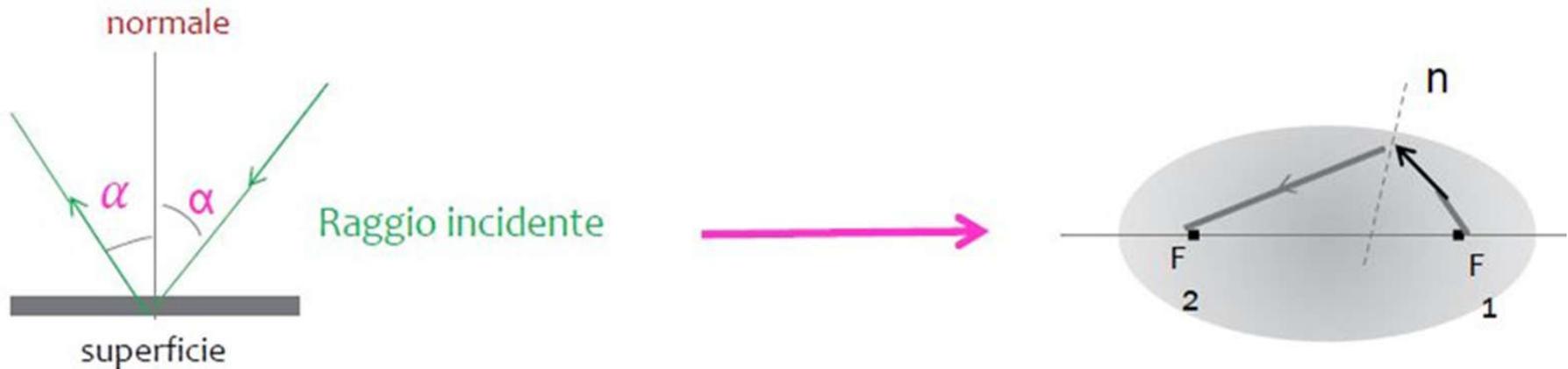
Vista la genericità di  $Q$  su  $r$ , allora  $P$  è l'unico punto in comune tra la bisettrice  $r$  e l'iperbole, cioè  $r$  è la tangente all'iperbole in  $P$ .

Per la proprietà 1 l'altra bisettrice coincide con la normale in  $P$  all'iperbole.



## PROPRIETA' FOCALE DELLA RIFLESSIONE

Dopo aver dimostrato i teoremi, possiamo applicare la proprietà focale alla riflessione



La riflessione è un fenomeno fisico connesso con la propagazione della luce. Ogni qualvolta la luce proveniente da una sorgente luminosa incontra una superficie ben levigata (ad esempio uno specchio o una superficie metallica priva di asperità) parte della luce torna indietro nell'aria (luce riflessa).



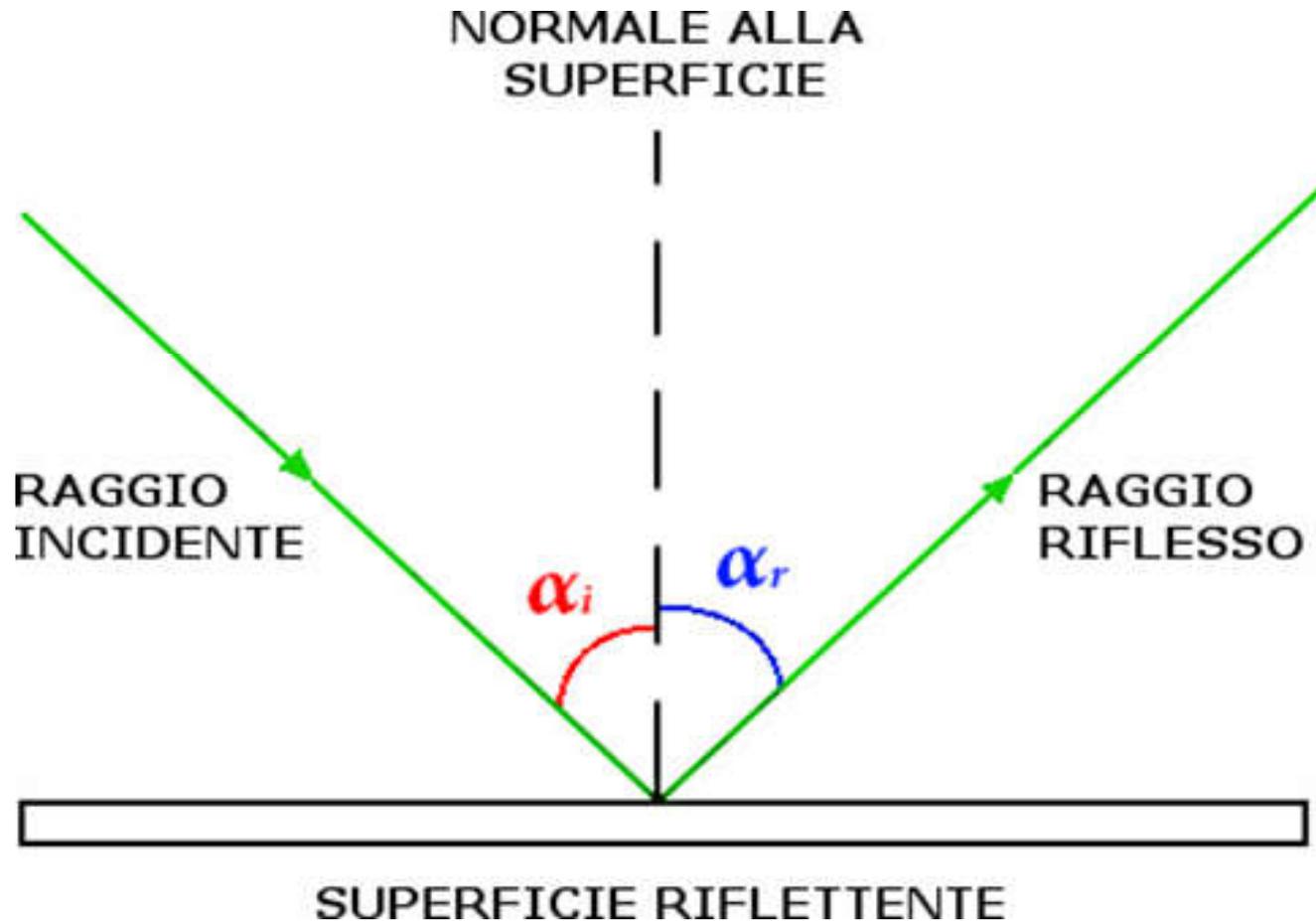
Ricordiamo che il fenomeno fisico della Riflessione è governato dalla legge sull'uguaglianza tra gli angoli che il raggio incidente e il raggio riflesso formano con la retta normale alla superficie riflettente. Se questa non è piana, la normale alla superficie in un suo punto è la retta perpendicolare al piano tangente in quel punto. Le lampade ellittiche e le camere a volta ellittica sfruttano una proprietà dell'ellisse che permette di prevedere quale sarà il raggio riflesso di un raggio originato in un fuoco.

Per dimostrare la proprietà, occorrono soltanto conoscenze di geometria elementare del piano, precisamente:

- due rette incidenti individuano quattro angoli, le cui bisettrici sono due rette tra loro perpendicolari
- la perpendicolare ad un segmento nel suo punto medio (asse del segmento) è il luogo dei punti equidistanti dagli estremi del segmento
- in un triangolo isoscele, l'asse della base coincide con la bisettrice dell'angolo opposto alla base
- in un qualsiasi triangolo, un lato è minore della somma degli altri due (disuguaglianza triangolare).



Esistono due leggi che regolano la riflessione della luce, dovute a Cartesio. Per enunciarle faremo riferimento alla seguente figura:



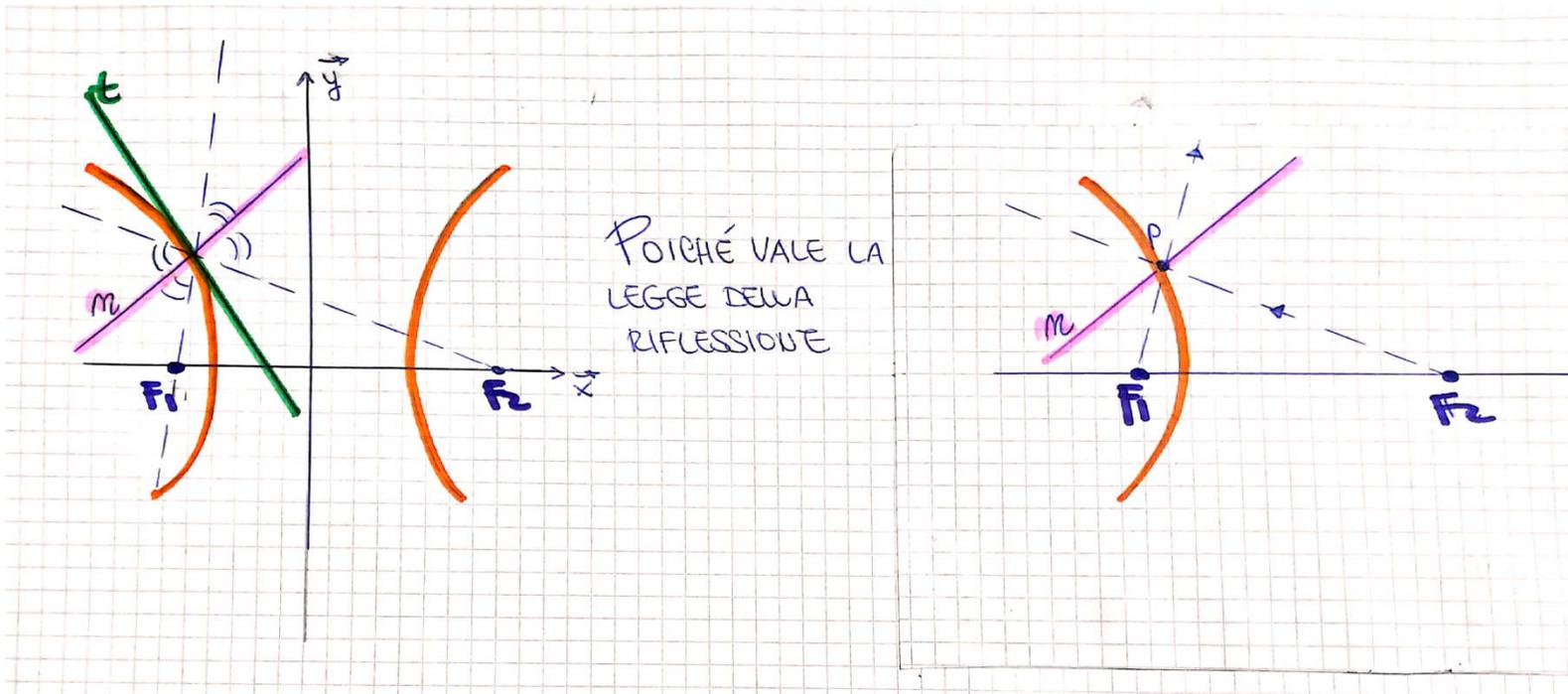
La **prima legge della riflessione** afferma che il raggio incidente, il raggio riflesso e la normale alla superficie riflettente giacciono sullo stesso piano, detto anche piano di incidenza.

La **seconda legge della riflessione** afferma invece

Che l'angolo di incidenza  $\alpha_i$  e l'angolo di riflessione  $\alpha_r$  sono uguali tra loro:  $\alpha_i = \alpha_r$ , dove l'angolo di incidenza  $\alpha_i$  è l'angolo che il raggio incidente forma con la normale alla superficie, mentre  $\alpha_r$  è l'angolo che la normale alla superficie forma con il raggio riflesso.



Negli specchi iperbolici i raggi emessi da un punto che occupa la posizione di fuoco ( $F_2$ ) vengono riflessi come se fossero emessi dall'altro fuoco.



Realizzato da:

- Torrisi Aurora
- Ciotto Andrea
- Cucina Giorgia

